

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/344397752>

# Il confinamento magnetico del plasma termonucleare

Thesis · July 2018

DOI: 10.13140/RG.2.2.16127.84647

---

CITATIONS

0

READS

40

1 author:



Gianluca Bianco

University of Bologna

4 PUBLICATIONS 0 CITATIONS

SEE PROFILE

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Fisica

# IL CONFINAMENTO MAGNETICO DEL PLASMA TERMONUCLEARE

**Relatore:**

**Prof. Michele Dragoni**

**Presentata da:**

**Gianluca Bianco**

Anno Accademico 2017/2018

# Sommario

Il plasma è considerato il quarto stato della materia. Tra le numerose applicazioni che trova in ambito fisico, è di notevole interesse il meccanismo di confinamento magnetico che lo coinvolge al fine di produrre energia nucleare tramite la reazione di fusione. Un sistema che rispecchia un fenomeno di questo tipo viene chiamato Tokamak, e consiste nel confinamento magnetico di un plasma termonucleare all'interno di una regione toroidale.

# Indice

<b>1</b>	<b>INTRODUZIONE ALLA FISICA DEL PLASMA</b>	<b>7</b>
1.1	Il plasma . . . . .	7
1.1.1	Caratteristiche generali . . . . .	7
1.1.2	Cenni storici . . . . .	10
1.1.3	Lunghezza di Debye . . . . .	11
1.1.4	Ordini di grandezza del plasma . . . . .	13
1.2	Oscillazioni libere del plasma . . . . .	14
1.2.1	Frequenza di oscillazione del plasma . . . . .	14
1.2.2	Equazioni del moto, di continuità e di Maxwell per un plasma . . . . .	15
1.2.3	Calcolo del gradiente di pressione . . . . .	18
1.3	Equazione di Klein-Gordon per la densità di elettroni . . . . .	20
1.3.1	L'equazione . . . . .	20
1.3.2	L'equazione per il campo elettrico . . . . .	21
1.3.3	Soluzioni dell'equazione . . . . .	22
1.3.4	La relazione di dispersione delle oscillazioni del plasma . . . . .	22
<b>2</b>	<b>MECCANISMI DI CONFINAMENTO MAGNETICO</b>	<b>24</b>
2.1	Plasma in un campo magnetico . . . . .	24
2.1.1	Equazione del moto . . . . .	24
2.1.2	Soluzione dell'equazione del moto . . . . .	25

2.2	Moto di una particella carica in un campo magnetico statico uniforme . .	28
2.2.1	Equazione del moto . . . . .	28
2.2.2	Soluzione dell'equazione del moto . . . . .	29
2.3	Moto di una particella carica in un campo magnetico statico non uniforme	31
2.3.1	Introduzione . . . . .	31
2.3.2	Caso 1: Gradiente del campo magnetico perpendicolare al campo stesso . . . . .	31
2.3.3	Caso 2: Curvatura delle linee di campo magnetico . . . . .	34
2.3.4	Caso 3: Gradiente del campo magnetico parallelo al campo stesso	36
2.4	Fasce di Van Allen . . . . .	39
<b>3</b>	<b>CONFINAMENTO MAGNETICO DI UN PLASMA TERMONUCLEA-</b>	
	<b>RE</b>	<b>42</b>
3.1	Introduzione . . . . .	42
3.1.1	La fusione nucleare . . . . .	42
3.1.2	Il confinamento magnetico del plasma . . . . .	43
3.1.3	Il Tokamak . . . . .	44
3.2	Equilibrio nel Tokamak . . . . .	45
3.2.1	Equazione di equilibrio . . . . .	45
3.2.2	Equazione di equilibrio per sistemi assialmente simmetrici . . . .	48
3.2.3	Campo verticale per l'equilibrio del Tokamak . . . . .	54
3.2.4	Controllo della posizione del plasma . . . . .	57
3.2.5	Limiti del rapporto beta poloidale per l'equilibrio . . . . .	58
3.2.6	Limite beta della sezione trasversale allungata del plasma . . . . .	60
3.2.7	Corrente di Pfirsch-Schlüter . . . . .	61
3.2.8	Spostamento di Shafranov . . . . .	62
3.3	International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER) . . . . .	63

<b>Conclusioni</b>	<b>65</b>
<b>Appendice</b>	<b>66</b>

# Introduzione

Il seguente elaborato ha lo scopo di esplicitare i principali meccanismi di confinamento magnetico del plasma termonucleare, approfondendo principalmente il confinamento del plasma in una regione toroidale.

Il primo capitolo descrive gli aspetti fondamentali della fisica del plasma in generale, facendo particolare attenzione alle oscillazioni libere dovute alla variazione di carica nel plasma stesso; in seguito viene ricavata l'equazione di Klein-Gordon per la densità di elettroni.

Nel secondo capitolo vengono introdotti i principali meccanismi di confinamento magnetico, partendo dalla descrizione dei vari moti possibili delle particelle all'interno di alcune tipologie di campo magnetico.

Infine, nell'ultimo capitolo, viene descritto uno dei meccanismi più efficienti per la produzione di energia nucleare: il confinamento magnetico del plasma all'interno del Tokamak, che è una regione toroidale, dove un plasma (termonucleare) deve essere confinato. Il plasma deve obbedire a determinate equazioni per l'equilibrio elettromagnetico, in particolare per i sistemi assialmente simmetrici. I campi agenti in questo tipo di struttura sono principalmente tre: toroidale, verticale e poloidale. Il primo e il secondo sono indotti esternamente, mentre il terzo è generato dal plasma. In conclusione viene dedicato un breve paragrafo ad un progetto internazionale di nome ITER, che si propone di realizzare un reattore sperimentale a fusione nucleare, la cui fisica obbedisce alle leggi elencate nei paragrafi precedenti.

# Capitolo 1

## INTRODUZIONE ALLA FISICA DEL PLASMA

### 1.1 Il plasma

#### 1.1.1 Caratteristiche generali

Il plasma è un gas costituito da molecole neutre e da un certo numero di molecole ionizzate. È dunque uno stato di equilibrio tra i processi di ionizzazione e ricombinazione di elettroni. Esso è un fluido conduttore, in cui elettroni e ioni tendono a muoversi in maniera separata, producendo separazione di carica e dunque forze di richiamo elettrostatiche. A causa di queste forze di richiamo, il plasma costituisce un sistema oscillante, caratterizzato da una relazione di dispersione non lineare. Ad alte frequenze gli ioni non riescono a seguire le oscillazioni del campo elettromagnetico, ma soltanto gli elettroni ci riescono. In quanto tale, il plasma è considerato come il quarto stato della materia, che si distingue quindi dal solido, dal liquido e dall'aeriforme. Sulla Terra è molto raro trovare del plasma, se non nei fulmini e nelle aurore polari, mentre nell'universo costituisce più del 99% della materia conosciuta. I tipi di plasmi più importanti sono tre:



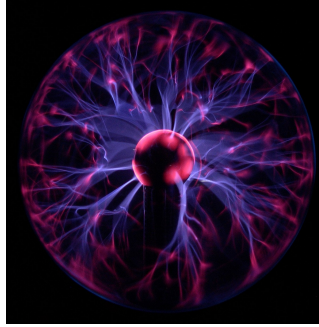


Figura 1.1: Plasma.

- I *plasma terrestri*, di temperature pari a pochi eV per gli elettroni e temperature più fredde per gli ioni; essi non producono di solito campi magnetici significativi, sono debolmente ionizzati e sono dominati dai processi di collisione.
- I *plasma terrestri di fusione*, la cui temperatura si aggira tra i 10 eV e alcune decine di MeV, in essi viene tipicamente prodotto un campo magnetico di 1 – 10 Tesla nei processi di confinamento magnetico.
- I *plasma spaziali*, le cui densità variano dai  $10^6$  ioni  $\text{m}^{-3}$  nello spazio interstellare, ai  $10^{20}$  ioni  $\text{m}^{-3}$  nell'atmosfera solare; molti di questi hanno temperature che si aggirano attorno ai 1 – 100 eV, e tendono ad essere completamente ionizzati.

Questo stato della materia è di difficile comprensione poichè è molto raro avere a che fare con il plasma nelle normali esperienze quotidiane (Bellan, 2006). Questa mancanza può essere colmata tuttavia da uno studio teorico. La dinamica del plasma è determinata dall'interazione contemporanea tra campi elettromagnetici e un numero molto grande di particelle cariche. La sua evoluzione temporale può essere calcolata in questo modo: date le traiettorie  $x_i(t)$  e le velocità  $v_i(t)$  di ogni particella  $i$ , i campi elettrici e magnetici si possono ottenere simultaneamente dalle equazioni di Maxwell. Oppure, dati i campi elettrici e magnetici, le forze agenti su ogni particella si possono ottenere usando l'equazione di Lorentz, per poi ottenere traiettorie e velocità. Tuttavia questi

metodi sono impraticabili, dato che il numero di particelle è significativamente elevato e il campo elettromagnetico è spesso troppo complicato. Dunque, per ottenere validi risultati, è abitudine studiare il plasma considerando fenomeni specifici, effettuando numerose approssimazioni su varie caratteristiche del sistema in cui si lavora, poichè senza di esse lo studio di un sistema contenente un plasma può risultare molto complesso. Una situazione in cui vengono effettuate una serie di approssimazioni viene chiamata *regime*. Le tipologie più comuni di semplificazioni di questo tipo sono:

- Approssimazioni sul campo elettromagnetico (annullamento del campo magnetico, esclusione della presenza di campi elettrici induttivi, assunzioni sulle simmetrie geometriche ecc...).
- Approssimazioni sulla descrizione delle particelle (considerazioni sulla forza di Lorentz di un gruppo di particelle, assunzioni sul tempo, sullo spazio e sulla velocità).

Il numero considerevole di permutazioni che possono essere effettuate combinando ognuna di queste possibilità, suggerisce l'esistenza di un numero notevole di regimi. Tuttavia, nonostante la presenza di tutti questi regimi, è difficile stabilire un punto di partenza per lo studio del plasma. Se si parla di fenomeni *lenti* allora si parte dalla schermatura di Debye, per poi collegarsi alle equazioni di Vlasov e alla magnetoidrodinamica. Se invece si parla di fenomeni *veloci* si comincia studiando le oscillazioni delle particelle presenti nel plasma. Seguendo studi approfonditi è possibile notare che entrambi i due campi alla fine vengono collegati da proprietà comuni. Nei paragrafi successivi, dopo aver fornito brevi cenni storici, si partirà considerando alcune caratteristiche qualitative e quantitative del plasma, come la lunghezza di Debye e gli ordini di grandezza, per poi passare allo studio delle sue oscillazioni libere, arrivando ad ottenere un'equazione per la densità di elettroni (equazione di Klein-Gordon).

### 1.1.2 Cenni storici

La parola *plasma* fu introdotta a metà del diciannovesimo secolo dal fisiologo ceco Jan Evangelista Purkinje per denotare il fluido rimanente dopo aver tolto tutti i corpuscoli presenti nel sangue. Il plasma, come quarto stato della materia, fu scoperto nel 1879 da Sir William Crookes e gli fu attribuito il nome *plasma* da Irving Langmuir nel 1928. Nel 1940, il fisico Hannes Alfvén sviluppò una teoria sulle onde idromagnetiche, evidenziando la loro importanza per lo studio del plasma astrofisico. All'inizio del 1950, la fisica del plasma si trovava alla base degli studi sull'energia di fusione magnetica, che era iniziata simultaneamente negli Stati Uniti, nella Gran Bretagna e nell'Unione Sovietica. Quando poi si accorsero che la ricerca nella fusione nucleare era di improbabile utilizzo in campo militare, le tre potenze decisero di declassificare i loro sforzi nel 1958, studiando il plasma per altre utilità. Alla fine del 1960, il sistema russo *Tokamak*, sviluppato a livello empirico, cominciò a produrre plasmi con parametri molto migliori di quelli ottenuti nei precedenti anni (vedi Figura 1.2). Tra il 1970 e il 1980, molti Tokamak furono costruiti

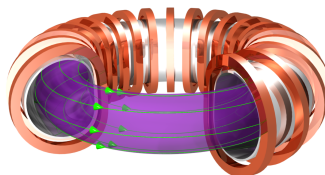


Figura 1.2: Sistema Tokamak per il confinamento del plasma termonucleare.

e, alla fine del ventesimo secolo, grazie a queste macchine, la fusione venne quasi completamente raggiunta e controllata. All'inizio del ventunesimo secolo, venne costruito il *Reattore Nucleare Internazionale Sperimentale (ITER)*, ossia un Tokamak programmato per produrre 500 MW di potenza dalla fusione nucleare. Contemporaneamente ci fu uno studio sul plasma spaziale: infatti, strumenti terrestri di misurazione del plasma ionosferico furono usati sin dal diciannovesimo secolo. La ricerca sul plasma spaziale

fu stimolata quando divenne possibile usare veicoli spaziali per effettuare misure sulla magnetosfera terrestre, sul vento solare e sulla magnetosfera di altri pianeti. Qualitativamente il plasma spaziale è simile a quello di laboratorio, ma è di scala molto diversa. Sin dal 1960, furono inoltre effettuati numerosi sforzi per l'utilizzo del plasma nella propulsione spaziale; da quel momento in poi numerosi propulsori al plasma furono sviluppati. Questi motori sono tutt'ora in fase di sviluppo avanzato, e fungono da protagonisti per il design di futuri veicoli spaziali. A partire dalla fine del 1980 cominciò l'utilizzo del plasma per una nuova applicazione: *l'elaborazione del plasma (plasma processing)*, per la costruzione di circuiti elettrici utilizzati nei moderni dispositivi elettronici. Nel 1990 cominciarono poi gli studi dei cosiddetti *plasma di polvere (dusty plasmas)*, dove granelli di polvere venivano immersi nel plasma, diventando elettricamente carichi, e comportandosi in seguito come altre particelle cariche. Tra il 1980 e il 1990 si cominciarono anche a studiare i *plasma non neutri* che contribuirono a risolvere alcuni problemi di incompressibilità idrodinamica. I plasma non neutri fungono inoltre da contenitori per grandi quantità di positroni.

### 1.1.3 Lunghezza di Debye

Nel plasma è presente una scala spaziale alla quale elettroni e ioni si muovono in modo indipendente: questa distanza minima è chiamata *lunghezza di Debye*. Ricordiamo che dentro ad esso deve essere rispettata la condizione di neutralità di carica. Nel plasma si forma inoltre un campo elettrico corrispondente ad un'energia potenziale data dalla seguente relazione:

$$U \propto \frac{e^2 \bar{n}}{\epsilon_0} L^2 \quad (1.1)$$

con  $\epsilon_0$  costante dielettrica nel vuoto,  $e$  carica dell'elettrone e  $L$  dimensione tipica del sistema. L'energia potenziale è tanto maggiore quanto lo è la densità di carica media degli elettroni  $\bar{n}$ . Se essa supera l'energia di agitazione termica si ha diffusione ambipolare, cioè elettroni e ioni si muovono in direzioni opposte, se invece è inferiore all'energia

cinetica delle particelle, si ha diffusione libera. L'energia minima che le particelle devono

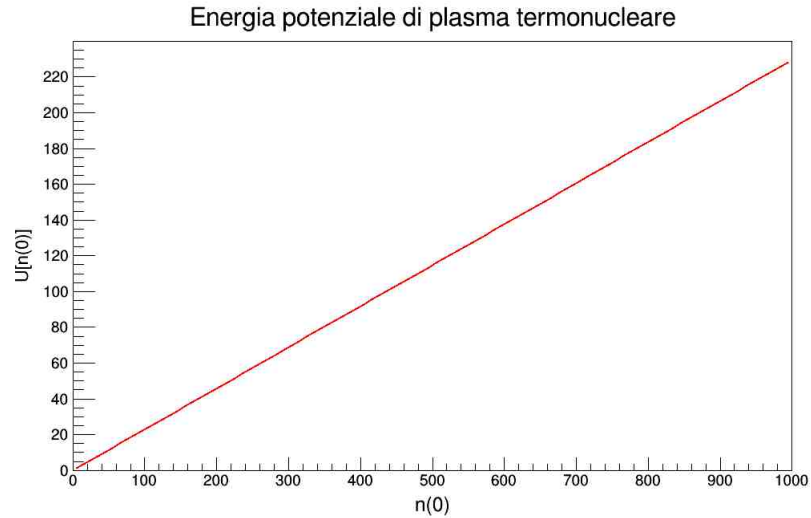


Figura 1.3: Grafico dell'energia potenziale di un plasma termonucleare (dimensione  $L = 10$  m) in funzione della densità di carica in esso. Il potenziale è espresso in Joule e la densità di carica in carica per metro cubo.

avere per muoversi liberamente definisce una lunghezza minima detta di Debye (già accennata sopra) entro la quale le particelle possono diffondere, data dalla seguente relazione (Bellan, 2006):

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2 n(0)}} \quad (1.2)$$

dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann e  $T$  è la temperatura assoluta. Dunque un plasma è un sistema in cui le dimensioni sono molto più grandi della lunghezza di Debye, e quindi:  $\lambda_D \ll L$ . In ogni caso questa relazione vale molto spesso per quasi tutti i gas ionizzati. Se esprimiamo la temperatura in elettronvolt ( $1 \text{ eV} = 11600 \text{ K}$ ), e la densità in particelle per metro cubo, otteniamo:

$$\lambda_D = 7430 \sqrt{\frac{T(\text{eV})}{n(\text{m}^{-3})}} \quad (1.3)$$

per i plasmi da laboratorio questa lunghezza è dell'ordine di  $10 \mu\text{m}$ . Dunque vediamo che la lunghezza data dalla (1.2) definisce una lunghezza minima per il moto indipendente

di ioni ed elettroni dentro una sfera, detta *sfera di Debye* (di raggio  $\lambda_D$ ). Al di fuori di questa sfera, il comportamento di ioni ed elettroni è determinato dal campo elettrico ambipolare. Questo fenomeno dà origine ai cosiddetti moti collettivi, infatti gli urti tra elettroni e ioni tramite la forza coulombiana costituiscono un fenomeno collettivo. Dunque normalmente, il libero cammino medio delle collisioni coulombiane, è maggiore della lunghezza di Debye.

### 1.1.4 Ordini di grandezza del plasma

Il plasma è caratterizzato da un insieme di grandezze fondamentali, tra le quali emergono: la temperatura (T), la densità di particelle cariche per metro cubo ( $\rho$ ), la dimensione (L), la lunghezza di Debye ( $\lambda_D$ ) e la frequenza di plasma ( $\omega_P$ ). Nella seguente tabella sono riportati i valori di alcuni parametri fondamentali di una serie di plasmi. In particolare

Plasma	$\rho(\text{m}^{-3})$	T(eV)	L(m)	$\lambda_D(\text{m})$	$\omega_P(\text{Hz})$
Gas interstellare	$10^6$	$10^{-2}$	$10^{19}$	$7 \times 10^{-1}$	$10^4$
<b>Plasma termonucleare</b>	<b><math>10^{20}</math></b>	<b><math>10^4</math></b>	<b>10</b>	<b><math>7 \times 10^{-5}</math></b>	<b><math>10^{11}</math></b>
Fulmine	$10^{24}$	2	$10^3$	$10^{-8}$	$10^{12}$
Ionosfera	$10^{12}$	$10^{-1}$	$10^4$	$2 \times 10^{-3}$	$10^7$
Vento solare	$10^7$	10	$10^{11}$	7	$3 \times 10^4$

Tabella 1.1: Ordini di grandezza delle caratteristiche fondamentali di un plasma.

sono state evidenziate le caratteristiche del plasma termonucleare, maggior candidato per l'applicazione "Tokamak", che prevede il confinamento magnetico di un plasma di questo tipo. Inoltre è bene ricordare che si possono produrre anche plasmi a temperatura ambiente, chiamati *plasmi freddi*.

## 1.2 Oscillazioni libere del plasma

### 1.2.1 Frequenza di oscillazione del plasma

Il plasma è in media elettricamente neutro, anche se in un dato istante, in una sua regione, si può avere un eccesso di carica  $+Q$  oppure un difetto di carica  $-Q$ . Si crea così un campo elettrico  $\mathbf{E}$ , che agisce come forza di richiamo: si ottengono allora delle oscillazioni longitudinali. Consideriamo il caso in cui il plasma sia racchiuso tra due pareti parallele all'asse delle ordinate, dove c'è una carica  $+Q$  su una di esse e una carica  $-Q$  sull'altra. Allora si avrà un campo elettrico diretto lungo l'asse delle ascisse:

$$E_x = -4\pi \frac{Q}{A} \quad (1.4)$$

dove indicheremo con  $A$  l'area della superficie di una delle pareti. Ora consideriamo le seguenti approssimazioni:

- Il moto degli ioni è trascurabile rispetto a quello degli elettroni.
- Le forze dovute alle collisioni di elettroni sono trascurabili. In questo caso si ha il *plasma tenue*.

Ora indicheremo con  $q$  la carica di un elettrone e con  $m$  la sua massa. L'equazione del moto sarà:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = qE_x \quad (1.5)$$

Se abbiamo  $N$  elettroni per unità di volume, e ciascuno di essi viene spostato dalla sua posizione media di una distanza  $x$ , allora la carica depositata su una parete sarà:

$$Q = NqAx \quad (1.6)$$

Derivando due volte otteniamo:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = NqA \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.7)$$

e, utilizzando l'espressione dell'equazione del moto:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{Nq^2A}{m}E_x \quad (1.8)$$

La (1.8) altro non è che l'equazione di un oscillatore armonico, dove la frequenza di oscillazione è data da:

$$\boxed{\omega_p^2 = \frac{4\pi Nq^2}{m}} \quad (1.9)$$

essa è la *frequenza di oscillazione del plasma*. Impostando la condizione iniziale:

$$Q(0) = Q_0 \quad (1.10)$$

la soluzione per  $Q$  è data da:

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega_p t \quad (1.11)$$

A questo punto notiamo che il campo elettrico oscilla con la stessa frequenza della carica elettrica:

$$E_x(t) = -E_0 \cos(\omega_p t) \quad (1.12a)$$

$$E_0 = \frac{4\pi Q_0}{A} \quad (1.12b)$$

Allo stesso modo oscillano posizione, velocità e accelerazione dell'elettrone.

## 1.2.2 Equazioni del moto, di continuità e di Maxwell per un plasma

Consideriamo ora un modello in cui si tiene conto delle variazioni della densità di elettroni: il numero degli elettroni per unità di volume viene indicato con la funzione:  $N(\mathbf{x}, t)$ . Trascuriamo il moto degli ioni e le collisioni degli elettroni. Consideriamo gli elettroni liberi come un fluido perfetto di densità:

$$\rho = Nm = Nm_e \quad (1.13)$$



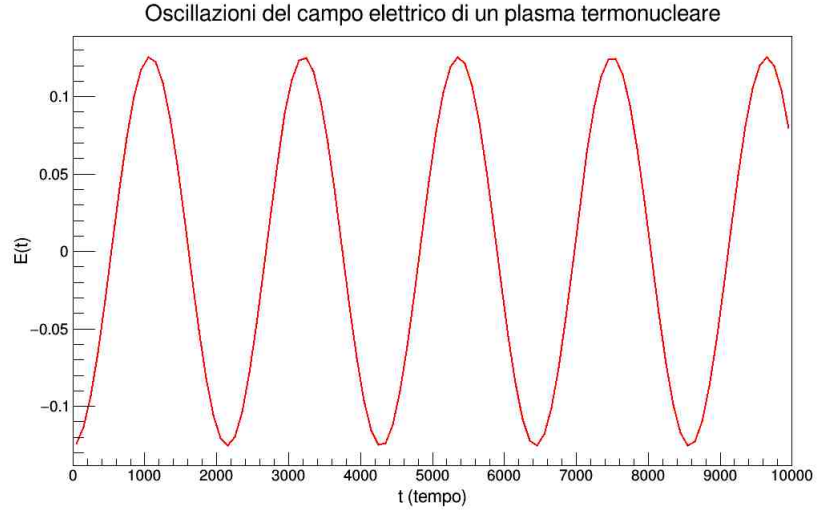


Figura 1.4: Grafico del campo elettrico di un plasma termonucleare (caratteristiche prese dalla tabella 1.1). Si è assunta la carica elettrica dell'elettrone pari a  $-1$  per comodità. Il campo elettrico è espresso in Newton/Coulomb e il tempo in secondi.

In esso è presente una forza di Lorentz per unità di volume, data da:

$$\mathbf{f} = Nq(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.14)$$

L'equazione del moto è quella di Eulero, e ha la seguente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{Nm} \nabla P \quad (1.15)$$

Con la rispettiva equazione di continuità:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (N\mathbf{v}) = 0 \quad (1.16)$$

Se  $N_0$  è il numero di elettroni nella situazione di equilibrio di carica, allora la densità di carica elettrica del fluido è data da:

$$\rho_e = (N - N_0)q \quad (1.17)$$

La corrente elettrica ora è:

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v} \quad (1.18)$$

Assumiamo che ci sia uno stato in cui il fluido è a riposo, con:

$$N = N_0 \quad (1.19a)$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad (1.19b)$$

$$\mathbf{E} = 0 \quad (1.19c)$$

$$\mathbf{B} = 0 \quad (1.19d)$$

Consideriamo piccoli scostamenti da tale stato. Trascurando i termini del secondo ordine nelle piccole quantità:  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , otteniamo delle equazioni lineari. Dunque l'equazione (1.15) di Eulero si semplifica:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{q}{m} \mathbf{E} - \frac{1}{N_0 m} \nabla P} \quad (1.20)$$

dove:

$$N \approx N_0 \quad (1.21)$$

Se definiamo  $N$  come scostamento della situazione di equilibrio, l'equazione (1.16) di continuità diventa:

$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial t} + N_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0} \quad (1.22)$$

E quindi la corrente elettrica è:

$$\mathbf{J} \approx N_0 q \mathbf{v} \quad (1.23)$$

A questo punto le equazioni di Maxwell possono essere scritte nella seguente forma:

$$\boxed{\nabla \mathbf{E} = 4\pi N q} \quad (1.24)$$

$$\boxed{\nabla \mathbf{B} = 0} \quad (1.25)$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0} \quad (1.26)$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi N_0 q}{c} \mathbf{v}} \quad (1.27)$$

### 1.2.3 Calcolo del gradiente di pressione

Il gradiente di pressione che compare nell'equazione di Eulero può essere scritto come:

$$\nabla P = \left( \frac{\partial P}{\partial N} \right)_{N=N_0} \nabla N \quad (1.28)$$

Per calcolarci  $\partial P/\partial N$  dobbiamo introdurre l'equazione di stato del gas costituito da elettroni:

$$PV^\gamma = P_0V_0^\gamma \quad (1.29)$$

dove  $P_0$  e  $V_0$  sono la pressione e il volume di equilibrio e  $\gamma$  è il rapporto tra calori specifici:

$$\gamma = c_P/c_V \quad (1.30)$$

Il valore di  $\gamma$  può dunque essere calcolato mediante il teorema di equipartizione dell'energia. Allora si avrà:

$$c_V = \frac{l}{2}R \quad (1.31)$$

dove  $l$  è il numero di gradi di libertà cinetici e  $R$  costante universale dei gas. Il calore specifico a pressione costante è uguale più un contributo dato dal lavoro di espansione:

$$c_P = \left( \frac{l}{2} + 1 \right) R \quad (1.32)$$

Dunque otteniamo:

$$\gamma = (l + 2)/l \quad (1.33)$$

Poichè consideriamo oscillazioni unidimensionali, avremo

$$l = 1 \quad (1.34)$$

e quindi:

$$\gamma = 3 \quad (1.35)$$

Allora l'equazione di stato (1.29) diventa:

$$P = P_0 \left( \frac{N}{N_0} \right)^3 \quad (1.36)$$

Da cui si ottiene poi:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{N=N_0} = 3\frac{P_0}{N_0} \quad (1.37)$$

Ora notiamo che il rapporto  $P_0/N_0$  può essere calcolato mediante l'equazione di stato dei gas perfetti; infatti, ricordando che:

$$n = (N_0 V_0)/N_A \quad (1.38)$$

con  $n$  numero di moli e  $N_A$  numero di Avogadro, si ha:

$$P_0 = \frac{N_0}{N_A} RT \quad (1.39)$$

Introducendo poi la costante di Boltzmann:

$$k_B = R/N_A \quad (1.40)$$

si avrà:

$$\frac{P_0}{N_0} = k_B T \quad (1.41)$$

Questo rapporto può essere poi espresso mediante la velocità quadratica media degli elettroni. Le molecole di un gas hanno stessa energia cinetica media a parità di temperatura, e dunque:

$$\frac{1}{2} m \bar{u}^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad (1.42)$$

con  $\bar{u}$  velocità quadratica media, e:

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{N} \quad (1.43a)$$

$$\sum_{i=1}^N u_i^2 \quad (1.43b)$$

Poichè le oscillazioni sono unidimensionali (come già detto precedentemente), il grado di libertà è unico, e quindi:

$$m \bar{u}^2 = k_B T \quad (1.44)$$

Allora il rapporto  $P_0/N_0$  può essere riscritto come:

$$P_0/N_0 = m\bar{u}^2 \quad (1.45)$$

Otteniamo infine:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{N=N_0} = 3m\bar{u}^2. \quad (1.46)$$

E quindi inserendola nella (1.28) si ha:

$$\boxed{\nabla P = 3m\bar{u}^2 \nabla N} \quad (1.47)$$

## 1.3 Equazione di Klein-Gordon per la densità di elettroni

### 1.3.1 L'equazione

Inserendo ora la (1.47) nella (1.20) si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{q}{m} \mathbf{E} - \frac{3\bar{u}^2}{N_0} \nabla N \quad (1.48)$$

Notiamo che la soluzione del problema deve essere puramente elettrostatica, dato che l'equazione non dipende dal campo magnetico. Consideriamo ora la divergenza della (1.48):

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{q}{m} \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{3\bar{u}^2}{N_0} \nabla^2 N \quad (1.49)$$

Utilizzando ora la (1.22) e la legge di Gauss, otteniamo:

$$-\frac{1}{N_0} \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = \frac{4\pi N q^2}{m} - \frac{3\bar{u}^2}{N_0} \nabla^2 N \quad (1.50)$$

che può essere riscritta come:

$$\boxed{\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} + \omega_p^2 N - 3\bar{u}^2 \nabla^2 N = 0} \quad (1.51)$$

Essa è *l'equazione di Klein-Gordon* per la densità di elettroni. Notiamo che se si trascura il gradiente di pressione, essa si riduce all'equazione di un oscillatore armonico, mentre se si trascura  $\omega_p$  essa si riduce all'equazione di d'Alembert per le onde piane.

### 1.3.2 L'equazione per il campo elettrico

Lo stesso discorso può essere fatto per il campo elettrico. Consideriamo la legge di Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi N_0 q}{c} \mathbf{v} \quad (1.52)$$

Deriviamola dunque rispetto al tempo:

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi N_0 q}{c} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (1.53)$$

Utilizzando l'equazione (1.48), otteniamo:

$$c \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + 4\pi N_0 q \left( \frac{q}{m} \mathbf{E} - \frac{3\bar{u}^2}{N_0} \nabla N \right) \quad (1.54)$$

Considerando la legge di Gauss:

$$N = \frac{1}{4\pi q} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (1.55)$$

abbiamo:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2 \mathbf{E} - 3\bar{u}^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = c \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.56)$$

Consideriamo il caso in cui:

$$\mathbf{B} = 0 \quad (1.57a)$$

$$\partial \mathbf{E} / \partial t = 0 \quad (1.57b)$$

e quindi:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.58)$$

Si avrà:

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla^2 \mathbf{E} \quad (1.59)$$

Allora la legge di Ampère si riduce a:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2 \mathbf{E} - 3\bar{u}^2 \nabla^2 \mathbf{E} = 0} \quad (1.60)$$

Notiamo che ciascuna componente del campo elettrico soddisfa l'equazione di Klein-Gordon (1.51).

### 1.3.3 Soluzioni dell'equazione

Poichè la (1.51) è lineare, essa è soddisfatta da qualunque sovrapposizione di onde piane monocromatiche, ossia da qualunque pacchetto d'onda dato dalla seguente relazione:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int A(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} \quad (1.61)$$

dove l'ampiezza  $A(\mathbf{k})$  è scritta in questo modo:

$$A(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi_0(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (1.62)$$

con condizione iniziale:

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}, 0) \quad (1.63)$$

### 1.3.4 La relazione di dispersione delle oscillazioni del plasma

Per ricavare la relazione di dispersione delle oscillazioni del plasma è necessario considerare l'equazione di Klein-Gordon in forma scalare:

$$3\bar{u}^2 \nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \omega_p^2 \psi = 0 \quad (1.64)$$

dove  $\psi$  rappresenta un campo scalare o una componente di un campo vettoriale. Consideriamo ora una generica onda piana, data da:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (1.65)$$

dove  $k$  è il vettore d'onda e  $\omega$  la frequenza di oscillazione. Inserendo la (1.65) nella (1.64) si ottiene infine:

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + 3\bar{u}^2 k^2} \quad (1.66)$$

che è la *relazione di dispersione delle oscillazioni del plasma*. Le oscillazioni sono dispersive, dato che la relazione è non lineare. Il primo termine rappresenta la forza di richiamo elettrostatica, mentre il secondo l'effetto della pressione.



## Capitolo 2

# MECCANISMI DI CONFINAMENTO MAGNETICO

### 2.1 Plasma in un campo magnetico

#### 2.1.1 Equazione del moto

Consideriamo ora un plasma tenue, di densità uniforme, situato all'interno di un campo magnetico  $\mathbf{B}_0$  statico e uniforme (Jackson, 2017), diretto lungo uno degli assi del sistema di coordinate:

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.1)$$

Sia data ora un'onda elettromagnetica di frequenza  $\omega$  che, attraverso il plasma, si propaga lungo la direzione  $\hat{\mathbf{e}}_3$ . Considerando il moto di un elettrone libero nel plasma, possiamo assumere che:

- Il moto dell'elettrone sia piccolo rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda$  dell'onda considerata.
- Le collisioni tra particelle siano trascurabili.

- Il campo magnetico  $\mathbf{B}$  dell'onda sia trascurabile rispetto al campo  $\mathbf{B}_0$  considerato.

Supponiamo ora che il campo elettrico  $\mathbf{E}$  dell'onda, nella posizione dell'elettrone, dipenda dal tempo e sia dato da:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_c e^{-i\omega t} \quad (2.2)$$

dove  $\mathbf{E}_c$  è un'ampiezza costante nel tempo. Allora l'equazione del moto dell'elettrone sarà data dalla seguente relazione:

$$\boxed{m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}_c e^{-i\omega t} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0} \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Soluzione dell'equazione del moto

Supponiamo ora che l'onda elettromagnetica considerata precedentemente sia polarizzata circolarmente, e quindi che l'ampiezza  $\mathbf{E}_c$  assuma la forma:

$$\mathbf{E}_c = E(\hat{\mathbf{e}}_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2) \quad (2.4)$$

A noi interessa trovare una soluzione stazionaria, per cui diremo che la velocità  $\mathbf{v}$  dell'elettrone considerato abbia lo stesso andamento del campo elettrico  $\mathbf{E}$  e quindi:

$$\mathbf{v}(t) = v(\hat{\mathbf{e}}_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2) e^{-i\omega t} \quad (2.5)$$

Se inseriamo la (2.5) nella (2.3), otteniamo:

$$-i\omega m v(\hat{\mathbf{e}}_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2) = qE(\hat{\mathbf{e}}_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2) + \frac{q}{c} v(\hat{\mathbf{e}}_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2) \times \mathbf{B}_0 \quad (2.6)$$

Considerando quanto asserito in precedenza sulla direzione del campo magnetico:

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.7)$$

possiamo dire che:

$$(\hat{\mathbf{e}}_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2) \times \mathbf{B}_0 = (\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_3 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3) B_0 = \pm i(\hat{\mathbf{e}}_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2) B_0 \quad (2.8)$$

Dunque l'equazione (2.3) si riduce a:

$$-i\omega mv = qE \pm i\frac{q}{c}vB_0 \quad (2.9)$$

che è un'equazione scalare. Spostando a sinistra tutti i termini contenenti la velocità  $v$ , si ha:

$$-i\left(\omega m \pm \frac{qB_0}{c}\right)v = qE \quad (2.10)$$

che infine diventa:

$$-im(\omega \pm \omega_0)v = qE \quad (2.11)$$

dove si è introdotta la *frequenza di ciclotrone*,  $\omega_0$ :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{qB_0}{mc}} \quad (2.12)$$

Dalla (2.11) ricaviamo poi l'espressione della velocità:

$$v = \frac{iqE}{m(\omega \pm \omega_0)} \quad (2.13)$$

che inserita nella (2.5) ci dà:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{iqE}{m(\omega \pm \omega_0)}(\hat{\mathbf{e}}_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2)e^{-i\omega t} \quad (2.14)$$

Ricordando l'espressione del campo elettrico data da (2.2) e inserendola nell'espressione precedentemente trovata, si ha:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{iq}{m(\omega \pm \omega_0)}\mathbf{E}(t) \quad (2.15)$$

Da quest'ultima formula possiamo notare la perpendicolarità tra campo elettrico e velocità dell'elettrone. Ora integriamo la velocità rispetto al tempo e otteniamo un'espressione della traiettoria:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 - a(\hat{\mathbf{e}}_1 \pm i\hat{\mathbf{e}}_2)e^{-i\omega t}} \quad (2.16)$$

dove  $a$  è il parametro:

$$a = \frac{qE}{m\omega(\omega \pm \omega_0)} \quad (2.17)$$

e la condizione iniziale è:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.18)$$

Esso indica la traiettoria di un moto circolare di raggio  $a$  e velocità angolare  $\omega$ . La velocità di rotazione è pari a:

$$v = \omega a \quad (2.19)$$

Dunque la presenza del campo magnetico  $\mathbf{B}_0$  modifica il raggio dell'orbita e la velocità di rotazione della particella, lasciando invariata la velocità angolare. Se abbiamo  $N$  elettroni per centimetro cubo, il loro moto genera una corrente pari a:

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v} \quad (2.20)$$

Se inseriamo la (2.15) nell'espressione della corrente, otteniamo:

$$\mathbf{J} = \frac{iNq^2}{m(\omega \pm \omega_0)} \mathbf{E} \quad (2.21)$$

La conducibilità elettrica in questo caso è immaginaria, e per:

$$\omega_0 = 0 \quad (2.22)$$

si riduce all'espressione già trovata per il plasma tenue. Ora consideriamo la (1.27), introducendo l'espressione della corrente trovata e tenendo conto del fatto che:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E} \quad (2.23)$$

otteniamo:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \frac{iNq^2}{m(\omega \pm \omega_0)} \mathbf{E} \quad (2.24)$$

Raccogliendo ora i due termini contenenti il campo elettrico, si ha:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{i\omega}{c} \left[ 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega(\omega \pm \omega_0)} \right] \mathbf{E} \quad (2.25)$$

che possiamo anche scrivere come:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left[ 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega(\omega \pm \omega_0)} \right] \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.26)$$

dove il termine tra quadre è interpretato come la *costante dielettrica del mezzo*:

$$\boxed{\epsilon = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega(\omega \pm \omega_0)}} \quad (2.27)$$

## 2.2 Moto di una particella carica in un campo magnetico statico uniforme

### 2.2.1 Equazione del moto

Consideriamo un campo magnetico statico e uniforme  $\mathbf{B}$ , e una particella di massa  $m$  e carica  $q$  che entra in esso con velocità  $v$ . L'equazione del moto è:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.28)$$

dove abbiamo introdotto la quantità di moto:

$$\mathbf{P} = \gamma m \mathbf{v} \quad (2.29)$$

con:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (2.30)$$

che è la relazione relativistica dell'impulso di una particella. Il moto considerato, non fa variare l'energia della particella, quindi velocità e  $\gamma$  sono costanti. Consideriamo ora la (2.12) in versione relativistica:

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{q\mathbf{B}}{\gamma mc} \quad (2.31)$$

L'equazione del moto potrà allora essere riscritta come:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_0} \quad (2.32)$$

## 2.2.2 Soluzione dell'equazione del moto

Supponiamo che il campo magnetico sia diretto lungo l'asse  $z$  di un sistema di riferimento a 3 assi cartesiani. Le componenti dell'equazione del moto in questo caso saranno:

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_0 v_y \quad (2.33a)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega_0 v_x \quad (2.33b)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (2.33c)$$

Integrandole due volte rispetto al tempo otteniamo la traiettoria:

$$x = x_0 + a \sin \omega_0 t \quad (2.34)$$

$$y = y_0 + a \cos \omega_0 t \quad (2.35)$$

$$z = z_0 + v_{\parallel} t \quad (2.36)$$

dove indichiamo con:

$$a = \frac{v_{\perp}}{\omega_0} \quad (2.37)$$

il *raggio di ciclotrone*, che è il raggio di un'elica, data dalle equazioni scritte sopra. Inoltre  $v_{\parallel}$  e  $v_{\perp}$  sono le componenti parallela e perpendicolare della velocità al campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Il *passo* dell'elica è definito come:

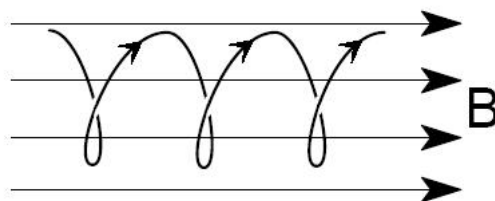


Figura 2.1: Moto elicoidale della particella lungo una linea di campo di  $\mathbf{B}$ .

$$P = \frac{2\pi v_{\parallel}}{\omega_0} \quad (2.38)$$

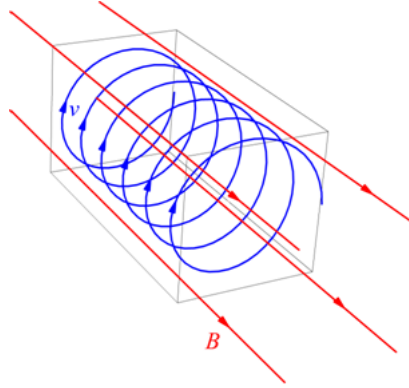


Figura 2.2: Moto elicoidale in 3 dimensioni, dove  $\mathbf{B}$  è il campo magnetico e  $v$  è la velocità.

Se  $P < 0$  allora l'elica è destrorsa, mentre se  $P > 0$  essa è sinistrorsa. Ora considerando la (2.32) e il fatto che  $\boldsymbol{\omega}_0$  è costante, possiamo dedurre che:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_0) \quad (2.39)$$

Ora, utilizzando come condizione iniziale:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_0 \quad (2.40)$$

e considerando il fatto che il campo magnetico è in direzione  $z$  e quindi con:

$$\omega_z = \omega_0 \quad (2.41)$$

otteniamo:

$$v_x = \omega_0 y = a\omega_0 \cos \omega_0 t \quad (2.42a)$$

$$v_y = -\omega_0 x = -a\omega_0 \sin \omega_0 t \quad (2.42b)$$

$$v_z = 0 \quad (2.42c)$$

Nel caso in cui la velocità avesse una componente

$$v_z \neq 0 \quad (2.43)$$

l'elica sarebbe sinistrorsa se  $v_z > 0$  o destrorsa se  $v_z < 0$ .

## 2.3 Moto di una particella carica in un campo magnetico statico non uniforme

### 2.3.1 Introduzione

Consideriamo alcuni casi in cui la distanza sulla quale il campo magnetico varia in maniera significativa è grande rispetto al raggio di ciclotrone della particella, e quindi il campo varia lentamente nello spazio. Possiamo assumere in prima approssimazione, che il moto della particella sia un'elica circolare attorno ad una linea di campo, con frequenza di ciclotrone data dal valore locale del campo magnetico. Dunque la non uniformità del campo stesso produce un moto di deriva dell'asse dell'elica.

### 2.3.2 Caso 1: Gradiente del campo magnetico perpendicolare al campo stesso

Consideriamo un campo magnetico statico diretto lungo l'asse  $z$  di un sistema di riferimento:

$$\mathbf{B} = B(y)\hat{\mathbf{z}} \quad (2.44)$$

con un gradiente pari a:

$$\nabla\mathbf{B} = -|\nabla B|\hat{\mathbf{y}} \quad (2.45)$$

Se il gradiente è molto piccolo possiamo sviluppare in serie di Taylor l'espressione del campo magnetico:

$$B(y) \simeq B_0 + \left(\frac{dB}{dy}\right)_0 y \quad (2.46)$$

con condizione iniziale

$$B_0 = B(0) \quad (2.47)$$

Dunque notiamo che anche la frequenza di ciclotrone dipende da  $y$ , infatti:

$$\omega(y) = \frac{q}{\gamma mc} B(y) \quad (2.48)$$



Quindi possiamo inserire l'espressione del campo magnetico sviluppato, nella (2.48), e otteniamo:

$$\omega(y) = \omega_0 \left[ 1 + \frac{1}{B_0} \left( \frac{dB}{dy} \right)_0 y \right] \quad (2.49)$$

con  $\omega_0$  frequenza di ciclotrone di  $B_0$ . Il moto della particella parallelo al campo magnetico rimane un moto di traslazione uniforme, dato che la direzione del campo è costante. L'unico moto ad essere modificato è quello perpendicolare al  $\mathbf{B}$ . Consideriamo quindi una particella che si muove sul piano  $xy$ , perpendicolare a  $\mathbf{B}$ , dunque con:

$$z = 0 \quad (2.50)$$

Indicheremo la sua velocità con:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \quad (2.51)$$

dove  $\mathbf{v}_0$  è la velocità che avrebbe la particella se il campo fosse uniforme, mentre  $\mathbf{v}_1$  è una correzione dovuta alla presenza del gradiente di campo. Inserendo quest'ultima espressione nella (2.32) si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1) \times \omega_0 \left[ 1 + \frac{1}{B_0} \left( \frac{dB}{dy} \right)_0 y \right] \quad (2.52)$$

Notiamo che la velocità  $\mathbf{v}_0$  soddisfa la (2.32), e il termine contenente il prodotto tra  $\mathbf{v}_1$  e  $\partial B/\partial y$  può essere trascurato, perchè del secondo ordine nello sviluppo. Dunque la (2.52) si riduce a:

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \left[ \mathbf{v}_1 + \frac{1}{B_0} \left( \frac{dB}{dy} \right)_0 y \mathbf{v}_0 \right] \times \omega_0 \quad (2.53)$$

Ricordiamo ora che in un campo uniforme la velocità è data dall'integrazione della (2.32). Considerando quanto appena detto, per  $\mathbf{v}_0$  la (2.53) diventerà:

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \left[ \mathbf{v}_1 + \frac{1}{B_0} \left( \frac{dB}{dy} \right)_0 y (\mathbf{r} \times \omega_0) \right] \times \omega_0 \quad (2.54)$$

Questa equazione per  $\mathbf{v}_1$  ha la stessa forma di quella per  $\mathbf{v}_0$ , senza ovviamente considerare il contributo dato dal gradiente di campo. La soluzione sarà data dall'equazione di un

oscillatore armonico, più un altro termine aggiuntivo:

$$v_{1x} = \omega_0 a \cos \omega_0 t - \frac{1}{B_0} \left( \frac{dB}{dy} \right)_0 y (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_0)_x \quad (2.55a)$$

$$v_{1y} = -\omega_0 a \sin \omega_0 t - \frac{1}{B_0} \left( \frac{dB}{dy} \right)_0 y (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_0)_y \quad (2.55b)$$

Il valore medio dell'oscillazione ottenuta è nullo, mentre quello del termine aggiuntivo fornisce un contributo al valore medio della velocità:

$$\boxed{\langle \mathbf{v}_1 \rangle = -\frac{1}{B_0} \left( \frac{dB}{dy} \right)_0 \langle y \mathbf{r} \rangle \times \boldsymbol{\omega}_0} \quad (2.56)$$

Definiremo

$$\langle \mathbf{v}_1 \rangle = \mathbf{v}_d \quad (2.57)$$

come la *velocità di deriva*. Le componenti della posizione oscillano quindi sinusoidalmente, secondo le leggi:

$$x(t) = a \sin \omega_0 t \quad (2.58a)$$

$$y(t) = a \cos \omega_0 t \quad (2.58b)$$

ma solo il valore medio della componente di  $y(t)$  è diverso da zero, inoltre

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (2.59)$$

quindi la (2.56) in questo caso è:

$$\mathbf{v}_d = -\frac{\omega_0}{B_0} \left( \frac{dB}{dy} \right)_0 \langle y^2 \rangle \hat{\mathbf{x}} \quad (2.60)$$

La particella subisce dunque un moto perpendicolare al campo e al gradiente. Ora ci interessa sapere il valore medio di  $y^2$ . Notiamo che, su un periodo di oscillazione avremo:

$$\langle y^2 \rangle = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} y^2(t) dt \quad (2.61)$$

che quindi, utilizzando la (2.58b), diventa:

$$\langle y^2 \rangle = \frac{\omega_0 a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t) dt \quad (2.62)$$

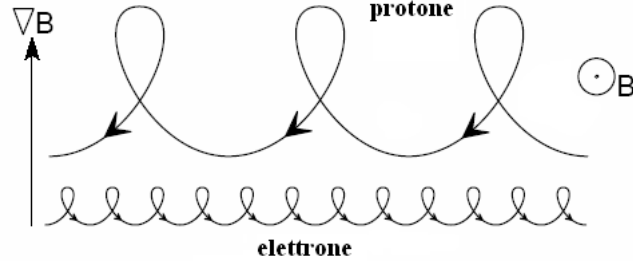


Figura 2.3: Moto di deriva dovuto alla presenza di un gradiente di campo magnetico perpendicolare al campo stesso.

Risolvendo la (2.62) si ottiene:

$$\langle y^2 \rangle = \frac{a^2}{2} \quad (2.63)$$

Sostituendo quindi il risultato ottenuto nella (2.60) si ha infine:

$$\boxed{\mathbf{v}_d = \frac{a^2 \omega_0}{2B^2} \mathbf{B} \times \nabla \mathbf{B}} \quad (2.64)$$

che è la velocità di deriva in questo caso particolare. La deriva può essere considerata come la conseguenza della variazione del raggio di ciclone dell'orbita, dovuta alla variazione spaziale del campo magnetico. Dunque, se non c'è una componente della velocità in direzione del campo, il moto della particella si limita ad essere vincolato sul piano  $xy$ . Se il campo fosse invece uniforme, verrebbe percorsa un'orbita circolare di raggio  $a$ . In quest'ultimo caso se  $\mathbf{B}$  varia in direzione  $y$ , il centro della circonferenza trasla lentamente in direzione  $x$ .

### 2.3.3 Caso 2: Curvatura delle linee di campo magnetico

Consideriamo ora il caso in cui le linee di campo magnetico siano curve. Supponiamo che il campo stesso abbia la seguente forma:

$$\mathbf{B} = (0, B_y, B_z) \quad (2.65)$$

dove  $B_y \ll B_z$ . Approssimiamo le linee di campo ad una circonferenza, con raggio di curvatura  $R$  uniforme. Se le linee fossero rette, la particella carica percorrerebbe un moto elicoidale attorno ad una linea di campo, con raggio di ciclotrone  $a$ . Assumendo  $R \gg a$ , otteniamo la seguente equazione del moto:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_0 \quad (2.66)$$

con

$$\boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0) \quad (2.67)$$

Le componenti dell'equazione, rispetto ad ogni asse, sono:

$$\ddot{x} = \omega_0 \dot{y} \quad (2.68a)$$

$$\ddot{y} = -\omega_0 \dot{x} \quad (2.68b)$$

$$\ddot{z} = 0 \quad (2.68c)$$

Ora consideriamo una linea di campo giacente sul piano  $yz$  e utilizziamo le coordinate cilindriche  $(r, \theta, x)$ , con origine nel centro di curvatura della linea di campo stessa. In questo sistema particolare, l'unica componente del campo magnetico diversa da zero è quella dipendente da  $\theta$ . Misurando  $\theta$  in senso orario, a partire dall'asse  $z$ , si avranno per  $y$  e per  $z$  due equazioni analoghe alle (2.64) e (2.58b). Derivando due volte la componente  $y$  dell'equazione del moto avremo:

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2.69)$$

Vediamo dunque che l'accelerazione lungo  $y$  è data dall'accelerazione radiale meno quella centripeta. Allora, considerando la (2.76), si avrà:

$$\ddot{y} = \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r = -\omega_0 \dot{x} \quad (2.70)$$

Trascurando  $a$ , rispetto ad  $R$ , possiamo scrivere quindi:

$$\dot{\theta} \simeq \frac{v_z}{R} \quad (2.71)$$

che è appunto la velocità angolare di una particella lungo la linea di campo circolare.

Approssimando

$$r \simeq R \quad (2.72a)$$

$$\ddot{r} \simeq 0 \quad (2.72b)$$

si ha infine:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} \simeq \frac{v_z^2}{\omega_0 R}} \quad (2.73)$$

La particella acquista quindi una velocità di deriva lungo  $x$ , e quindi perpendicolare al campo magnetico e al raggio di curvatura della linea di campo. Nel confinamento magnetico di un plasma termonucleare, la deriva dovuta al gradiente di campo e quella dovuta alla curvatura delle linee di campo hanno la stessa direzione e danno origine ad una corrente di forma anulare (Figura 2.2).

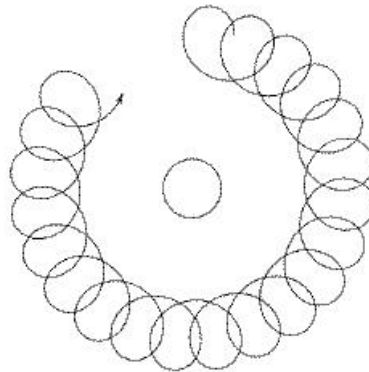


Figura 2.4: Corrente di forma anulare.

### 2.3.4 Caso 3: Gradiente del campo magnetico parallelo al campo stesso

Consideriamo ora un campo magnetico in cui la componente più importante è quella lungo l'asse  $z$  e il suo gradiente è positivo lungo quella direzione. L'espressione del

campo in coordinate cilindriche sarà:

$$\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z) \quad (2.74)$$

con  $B_r \ll B_z$ . Assumiamo naturalmente una simmetria assiale. Consideriamo ora una particella di massa  $m$  e carica  $q$ , la componente lungo l'asse  $z$  dell'equazione del moto sarà data da:

$$\frac{dv_z}{dt} = -v_\phi \omega_r \quad (2.75)$$

dove  $\omega_r$  è la componente  $r$  della frequenza di ciclotrone, quindi:

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{q}{\gamma mc} v_\phi B_r \quad (2.76)$$

Utilizzando le coordinate cilindriche, la (2.76) diventa:

$$\ddot{z} = -\frac{q}{\gamma mc} r \dot{\phi} B_r \quad (2.77)$$

Ora prendiamo in considerazione l'equazione di Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.78)$$

che scritta in coordinate cilindriche diventa:

$$B_r + r \frac{\partial B_r}{\partial r} + r \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (2.79)$$

approssimiamo:

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} \simeq \frac{B_r}{r} \quad (2.80)$$

dato che  $B_r$  è piccolo, quindi osserviamo la seguente proporzionalità:

$$B_r \simeq -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2.81)$$

Sostituendo la (2.81) nella (2.77) si ha:

$$\ddot{z} = \frac{q}{2\gamma mc} r^2 \dot{\phi} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2.82)$$

Tenendo conto dell'approssimazione fatta precedentemente, possiamo dire che in:

$$z = 0 \quad (2.83)$$

si ha:

$$r = a\dot{\Phi} = -\omega_0 \quad (2.84)$$

il meno è dovuto al fatto che  $\Phi$  aumenta in senso orario. Quindi possiamo dire che:

$$r^2\dot{\Phi} \simeq -a^2\omega_0 \simeq -\frac{v_{\perp}^2}{\omega_0} \quad (2.85)$$

inoltre si ha che:

$$\frac{q}{2m\gamma c} = \frac{\omega_0}{2B_0} \quad (2.86)$$

dove  $B_0$  è il modulo del campo magnetico nel punto:

$$z = 0 \quad (2.87)$$

Allora la (2.82) diventa:

$$\ddot{z} = -\frac{v_{\perp}^2}{2B_0} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{v_{\perp}^2}{2B_0} \frac{\partial B_z}{\partial t} \frac{dt}{dz} \quad (2.88)$$

da cui si ottiene:

$$2\dot{z}\ddot{z} = -\frac{v_{\perp}^2}{B_0} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{d}{dt} \dot{z}^2 \quad (2.89)$$

Integrando la (2.89) rispetto al tempo, e ponendo

$$\dot{z} = v_{\parallel} \quad (2.90a)$$

$$B_z \simeq B \quad (2.90b)$$

si ha:

$$v_{\parallel}^2(z) = v_0^2 - v_{\perp}^2(0) \frac{B(z)}{B_0} \quad (2.91)$$

dove le condizioni iniziali sono:

$$B_z(0) = B_0 \quad (2.92a)$$

$$v(0) = v_0 \quad (2.92b)$$

Considerando il fatto che la velocità della particella è costante in modulo, avremo in ogni posizione lungo  $z$ :

$$v_{\parallel}^2(z) + v_{\perp}^2(z) = v_0^2 \quad (2.93)$$

Introducendo la (2.91) nella (2.93) otteniamo:

$$\frac{v_{\perp}^2(0)}{B_0} = \frac{v_{\perp}^2(z)}{B_z} \quad (2.94)$$

Quindi notiamo che il rapporto:  $v_{\perp}^2/B$  è costante, per cui:

$$\boxed{v_{\perp} = a\omega_0 = \frac{qBa}{\gamma mc}} \quad (2.95)$$

da ciò segue che:

$$Ba^2 = BA = \text{cost} \quad (2.96)$$

dove  $A$  è l'area interna all'orbita della particella. Dunque se il campo magnetico considerato varia lentamente nello spazio, il flusso del campo stesso racchiuso dall'orbita è costante. Perciò  $a$  è inversamente proporzionale a  $B$ . Al crescere del  $B$  con  $z$ , la componente  $v_{\parallel}$  si rimpicciolisce sempre di più; a questo punto la particella rallenta il suo moto lungo  $z$  e si muove su un'orbita sempre più stretta. Ad un certo istante  $v_{\parallel}$  si annulla e si inverte, percorrendo un'elica nello stesso senso, ma in direzione  $-z$ . Questo fenomeno viene chiamato *specchio magnetico* (Vedi Figura 2.4).

## 2.4 Fasce di Van Allen

Le fasce di Van Allen sono un classico esempio di combinazione dei casi 1 e 2 del precedente paragrafo. Esse sono due regioni distinte, di forma toroidale, che possiedono un'elevata concentrazione di particelle cariche (plasma) (<https://www.nasa.gov/>). Si trovano circa rispettivamente a 1.5 e 3.5 raggi terrestri al di sopra dell'equatore. Qui il gas magnetosferico è formato da particelle ad alta energia governate dalla dinamica



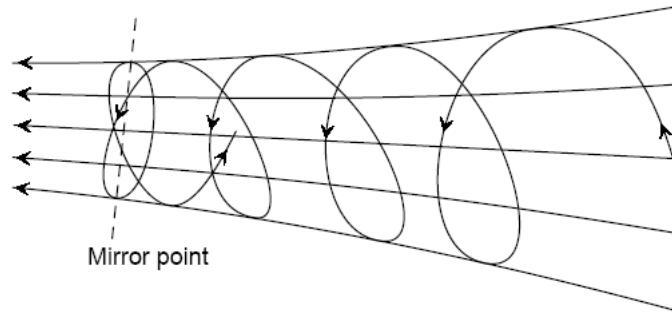


Figura 2.5: Fenomeno dello specchio magnetico.

relativistica. Queste particelle, essendo in costante movimento, sono soggette ad urti, con conseguente perdita di energia ed emissione di radiazione:

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- \quad (2.97)$$

La (2.97) rappresenta un tipico caso di *scattering* tra due elettroni. L'analogo diagramma di Feynman è illustrato in Figura 2.3. La fascia interna contiene maggiormente protoni

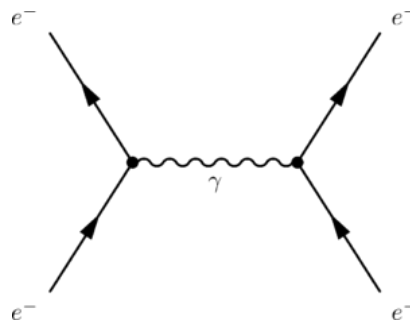


Figura 2.6: Diagramma di Feynman di scattering tra due elettroni. Durante l'urto viene emesso un fotone  $\gamma$ .

ad energia elevata (circa 100 MeV), ed è particolarmente stabile; mentre la fascia esterna contiene più che altro ioni ed elettroni a energie notevolmente più basse (circa 1 MeV) ed è maggiormente influenzata dalle perturbazioni del vento solare. Come accennato

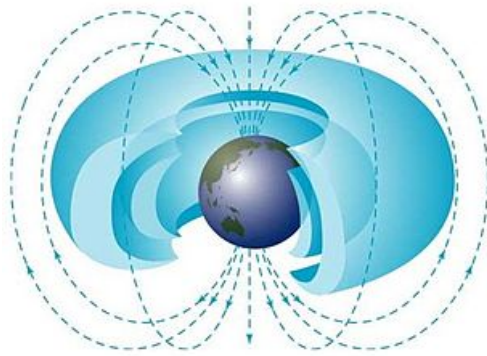


Figura 2.7: Fasce di Van Allen.

precedentemente, le fasce di Van Allen sono caratterizzate da un moto di deriva longitudinale attorno alla Terra. Questa deriva spinge verso ovest per le cariche positive e verso est per quelle negative, dando luogo ad una corrente anulare (Figura 2.2). La densità di corrente è dell'ordine di alcuni  $\text{nA/m}^2$ . Questa corrente è formata principalmente da ioni con energie comprese tra 10 MeV e 20 MeV, che si muovono nel piano equatoriale geomagnetico. Questi ioni sono principalmente  $H^+$  (provenienti dal vento solare e dalla ionosfera) e  $O^+$  (provenienti dalla ionosfera). Il fenomeno delle *tempeste magnetiche* è causato dall'aumento dell'intensità della corrente anulare, provocato dal vento solare. Gli  $O^+$  rappresentano circa il 6% della densità di energia della corrente nei periodi di quiete, mentre rappresentano oltre il 50% durante le tempeste. Si ritiene che le fasce di Van Allen abbiano avuto origine dalla collisione tra il vento solare e il campo magnetico terrestre infatti le particelle cariche che costituiscono il vento solare, vengono deviate dalla forza di Lorentz una volta entrate nel campo magnetico. Dove il campo è più intenso le particelle vengono respinte e continuano a oscillare in direzione nord-sud nelle zone tropicali ed equatoriali, spiraleggiando attorno alle linee di forza del campo. Le due fasce sono separate grazie alla presenza di onde radio a bassa frequenza, che a loro volta respingono eventuali particelle che potrebbero stanziarsi in quella zona a causa di tempeste magnetiche molto intense.

## Capitolo 3

# CONFINAMENTO MAGNETICO DI UN PLASMA TERMONUCLEARE

### 3.1 Introduzione

#### 3.1.1 La fusione nucleare

In fisica nucleare la *fusione nucleare* è il processo di reazione secondo cui i nuclei di due o più atomi vengono avvicinati o compressi a tal punto da superare la forza di repulsione elettromagnetica e unirsi tra loro, generando il nucleo di un elemento di massa minore o maggiore della somma delle masse dei nuclei reagenti (Freidberg, 2007). La fusione di elementi fino al numero atomico 28 è detta *reazione esotermica*, e quindi emette energia a causa della perdita di massa; mentre per numeri atomici superiori la reazione è detta *reazione endotermica*, poichè viene assorbita energia per la costruzione di nuclei atomici di massa maggiore. Il processo di fusione è un meccanismo importantissimo per le stelle, dove vengono generati tutti gli elementi che costituiscono l'universo attuale, tranne H e He, che derivano dalla nucleosintesi cosmica. Alcuni studi sono attualmente in corso per riprodurre a fini energetici fenomeni di *fusione nucleare controllata* in reattori nucleari a

fusione. Dal punto di vista storico, la fusione di isotopi pesanti dell'idrogeno fu realizzata per la prima volta da Mark Oliphant nel 1932. Durante il resto di quel decennio, gli stadi del ciclo principale della fusione nucleare nelle stelle furono ricavati da Hans Bethe. Le ricerche sulla fusione per scopi militari cominciarono all'inizio del 1940, come parte del *Progetto Manhattan*, ma ciò fu realizzato solo nel tardo 1951. Le ricerche per la fusione nucleare per scopi civili iniziarono invece negli anni '50, e continuano ancora oggi. Una delle reazioni nucleari più importanti è la *reazione Deuterio-Trizio (DT)*, che è rappresentata così:



dove Deuterio ( ${}^2\text{H}$ ) e Trizio ( ${}^3\text{H}$ ) reagiscono per dare  ${}^4\text{He}$  con un'energia pari a 3.5 MeV, e un neutrone  $n$  con un'energia pari a 14.1 MeV. Essa è mostrata in Figura (3.1).

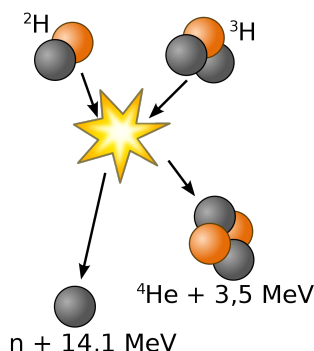


Figura 3.1: Reazione Deuterio-Trizio (DT).

L'unico svantaggio della (3.1) è che i neutroni prodotti, essendo privi di carica, non possono essere confinati da un campo magnetico e necessitano di schermature apposite. Inoltre essi tendono ad attivare i materiali metallici nelle vicinanze, ciò è uno dei problemi principali per reattori a fusione come l'ITER.

### 3.1.2 Il confinamento magnetico del plasma

Nella fusione a confinamento magnetico, il plasma caldo è racchiuso in una camera a

vuoto, e una opportuna configurazione di campi magnetici esterni o prodotti da correnti circolanti nel plasma impedisce il contatto con le pareti del recipiente. A questo proposito, sono state studiate diverse configurazioni magnetiche: *configurazione a specchio*, dove le linee di forza del campo magnetico sono aperte alle estremità del plasma e la *configurazione a simmetria toroidale* per esempio il Tokamak, già citato nel Paragrafo (1.1.2). Quella che fin'ora ha ottenuto risultati migliori nella fusione a confinamento magnetico è quella del Tokamak, che verrà approfondita nei paragrafi successivi (Arms et al., 2000).

### 3.1.3 Il Tokamak

La parola *Tokamak* è una contrazione delle parole russe per indicare *corrente*, *contenitore*, *magnete* e *bobina* (Miyamoto, 2007). Un Tokamak è una macchina di forma toroidale, ideata da fisici russi, che, attraverso il confinamento magnetico di isotopi di idrogeno allo stato di plasma, crea le condizioni affinché si verifichi al suo interno la fusione termonucleare, allo scopo di estrarne l'energia prodotta (<https://www.iter.org/>). Esso è una macchina sperimentale in via di ottimizzazione. La miscela di gas presenti all'interno del Tokamak è generalmente composta da Deuterio e Trizio. La miscela di gas allo stato

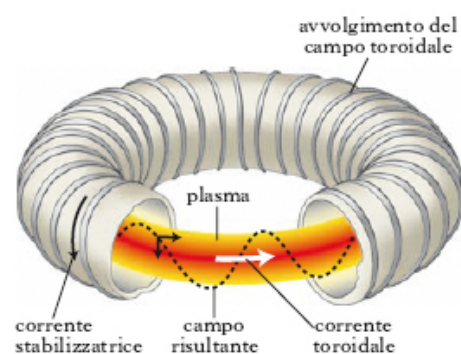


Figura 3.2: Reattore nucleare Tokamak.

di plasma risulta essere completamente ionizzata, e pertanto controllabile utilizzando

campi elettrici e magnetici esterni. Ci sono essenzialmente tre tipi di campi magnetici: toroidale, verticale e poloidale. Il primo e il secondo sono indotti esternamente, mentre il terzo viene generato dal plasma stesso. In particolare, il primo permette di generare un campo diretto attorno all'asse di simmetria del toro che vincola le particelle cariche a fluire lungo quella direzione. Il secondo permette il controllo della posizione del plasma, infine il terzo ne assicura l'equilibrio. Il plasma, per raggiungere la fusione termonucleare, deve soddisfare particolari condizioni. Per il raggiungimento di queste condizioni un fattore importante è la temperatura del plasma, per l'innalzamento della quale viene trasmessa altissima energia al plasma stesso. Il particolare tipo di plasma interessato in questo caso è il *plasma termonucleare* le cui caratteristiche sono riportate in Tabella (1.1).

## 3.2 Equilibrio nel Tokamak

### 3.2.1 Equazione di equilibrio

Quando il plasma è in uno stato stazionario e la velocità del fluido è nulla, le equazioni di equilibrio sono rappresentate così (Arms et al., 2000):

$$\nabla P = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3.2d)$$

dove  $P$  è la pressione,  $\mathbf{J}$  la densità di corrente,  $\mathbf{B}$  il campo magnetico e  $\mu_0$  la costante di permeabilità magnetica nel vuoto. Dalla prima di esse abbiamo in particolare:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla P = 0 \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{J} \cdot \nabla P = 0 \quad (3.3b)$$

Le equazioni (3.3a) e (3.3b) ci dicono che il gradiente di pressione è perpendicolare al campo magnetico. Dunque le superfici di pressione costante coincidono con le superfici magnetiche, e il vettore  $\mathbf{J}$  è ovunque parallelo alle superfici di pressione costante. Sostituendo la (3.2b) nella (3.2a), otteniamo:

$$\nabla \left( P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{B^2}{\mu_0} \left( -\frac{1}{R} \mathbf{n} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial l} \mathbf{b} \right) \quad (3.4)$$

dove si sono utilizzate due identità vettoriali:

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla \left( \mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{B}}{2} \right) \quad (3.5a)$$

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = B^2 \left[ -\frac{\mathbf{n}}{R} + \mathbf{b} \left( \frac{\partial B}{\partial l} \right) \frac{1}{B} \right] \quad (3.5b)$$

con  $R$  raggio della curvatura delle linee di forza magnetiche,  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{b}$  rispettivamente versore normale e versore tangenziale alla linea di forza. Inoltre  $l$  è la lunghezza lungo la linea di

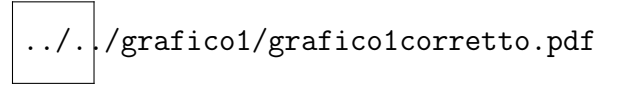


Figura 3.3: In figura viene rappresentata la situazione relativa alle (3.5a) e (3.5b), dove  $\mathbf{B}$  è il campo magnetico,  $R$  il raggio di curvatura,  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{b}$  rispettivamente versore normale e versore tangenziale alla linea di forza.

campo. Troviamo che il lato destro della (3.4) può essere trascurato quando il raggio di curvatura è molto grande rispetto alla lunghezza di scala del plasma. Anche la variazione del campo magnetico lungo la linea di forza è molto più piccola della variazione di  $\mathbf{B}$  nella direzione perpendicolare. Allora possiamo scrivere:

$$P + \frac{B^2}{2\mu_0} \simeq \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad (3.6)$$

dove  $B_0$  è il valore del campo magnetico al confine del plasma ( $P = 0$ ). Nei punti in cui il sistema è simmetrico assialmente e la derivata parziale rispetto all'asse  $z$  è nulla,

l'equazione (3.4) si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( P + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{B_\theta^2}{r\mu_0} \quad (3.7)$$

Se moltiplichiamo la (3.7) per  $r^2$  e integriamo per parti, otteniamo:

$$\left( P + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0} \right)_{r=a} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \left( P + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) 2\pi r dr \quad (3.8)$$

da cui si ottiene infine:

$$\boxed{\langle P \rangle + \frac{\langle B_z^2 \rangle}{2\mu_0} = P_A + \frac{B_z^2(a) + B_\theta^2(a)}{2\mu_0}} \quad (3.9)$$

con  $\langle P \rangle$  media volumetrica della pressione e  $P_A$  pressione del plasma al confine. Poiché  $B^2/2\mu_0$  è la pressione del campo magnetico, allora la (3.9) è l'equazione per l'equilibrio della pressione. Il rapporto tra pressione del plasma e pressione del campo magnetico  $B_0$  esterno è:

$$\boxed{\beta = \frac{P}{\frac{B_0^2}{2\mu_0}} = \frac{n(T_e + T_i)}{\frac{B_0^2}{2\mu_0}}} \quad (3.10)$$

con  $T_e$  temperatura degli elettroni, e  $T_i$  temperatura degli ioni. Esso viene chiamato *rapporto beta*. Per un plasma confinato, il rapporto beta è minore di 1. Il rapporto tra pressione del plasma e pressione del campo poloidale  $B_\theta$  è chiamato *beta poloidale*. Quando la pressione al confine è nulla, e:

$$|B_z(a) - B_z(r)| \ll |B_z(a)| \quad (3.11)$$

allora nella (3.9) la beta poloidale diventa:

$$\beta_P = \frac{\langle P \rangle}{\frac{B_\theta^2(a)}{2\mu_0}} = 1 + \frac{B_z^2(a) - \langle B_z^2(r) \rangle}{B_\theta^2(a)} \quad (3.12)$$

che diventa circa:

$$\boxed{\beta_P \simeq 1 + \left( \frac{2B_z}{B_\theta} \right)_a \langle B_z(a) - B_z(r) \rangle} \quad (3.13)$$



dove  $B_z(a)$  è il campo magnetico nella direzione  $z$  nel caso in cui non ci sia il plasma. Se  $\beta_P > 1$  l'intensità del campo magnetico  $B_z(r)$  dentro al plasma è più piccola di quella nel caso di vuoto, e quindi:

$$B_z(r) < B_z(a) \quad (3.14)$$

Questo fenomeno sottolinea il *diamagnetismo* del plasma. Nel caso in cui  $\beta_P < 1$ , allora la disequazione sopra si inverte. Quando la corrente del plasma fluisce lungo le linee di forza magnetiche, essa produce il campo magnetico poloidale, e compare una componente poloidale della corrente del plasma, che diventa additiva lungo l'asse  $z$  del campo magnetico. Questo fenomeno è invece la causa del *paramagnetismo* del plasma.

### 3.2.2 Equazione di equilibrio per sistemi assialmente simmetrici

Utilizziamo ora le coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$  e denotiamo la superficie magnetica con  $\Psi$  (vedi Appendice) e il potenziale vettore con  $\mathbf{A}$ . La superficie magnetica, in un sistema assialmente simmetrico, è data da:

$$\Psi = rA_r\varphi(r, z) \quad (3.15)$$

Le componenti lungo  $r$  e lungo  $z$  del campo magnetico sono:

$$rB_r = -\frac{\partial\Psi}{\partial z} \quad (3.16a)$$

$$rB_z = \frac{\partial\Psi}{\partial r} \quad (3.16b)$$

Ricordiamo che  $\Psi$  viene anche chiamata *funzione di flusso poloidale*. Ora vediamo che la (3.3a) può essere ora espressa come:

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

quindi la pressione è funzione di  $\Psi$ . In maniera analoga, dalle (3.3b) e (3.2b) si ha:

$$-\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial(rB_r\varphi)}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(rB_r\varphi)}{\partial r} = 0 \quad (3.18)$$

ciò significa che  $rB_\varphi$  è funzione solamente di  $\Psi$  e in particolare:

$$rB_\varphi = \frac{\mu_0 I(\Psi)}{2\pi} \quad (3.19)$$

la (3.19) ci dice che  $I(\Psi)$  è la corrente fluente nella direzione poloidale, attraverso la sezione trasversale circolare entro:  $\Psi = rA_\varphi$ . La componente lungo  $r$  della (3.2a) porta

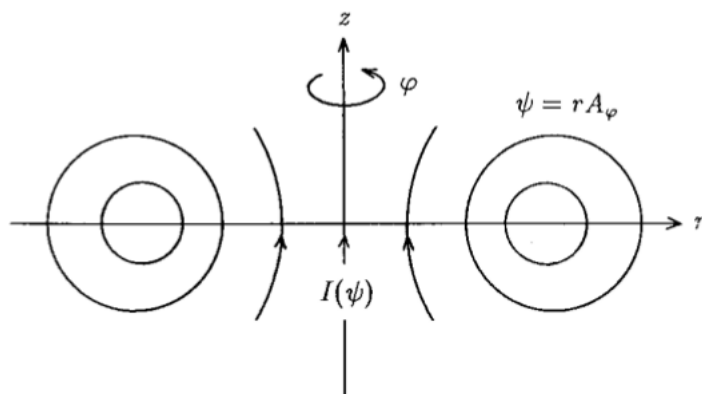


Figura 3.4: Superficie magnetica  $\Psi = rA_\varphi$  e corrente fluente nella direzione poloidale  $I(\Psi)$ .

all'equazione per  $\Psi$ , data da:

$$L(\Psi) + \mu_0 r^2 \frac{\partial P(\Psi)}{\partial \Psi} + \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} \frac{\partial I^2(\Psi)}{\partial \Psi} = 0 \quad (3.20)$$

dove  $L$  è l'*operatore di Grad-Shafranov*, che applicato a  $\Psi$  restituisce l'*equazione di Grad-Shafranov*:

$$L(\Psi) = \left( r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi \quad (3.21)$$

La densità di corrente è espressa in funzione della superficie magnetica:

$$J_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I(\Psi)}{\partial z} \quad (3.22a)$$

$$J_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I(\Psi)}{\partial r} \quad (3.22b)$$

$$J_\varphi = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = -\frac{L(\Psi)}{\mu_0 r} = \frac{1}{\mu_0 r} \left( \mu_0 r^2 P' + \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} (I^2)' \right) \quad (3.22c)$$

dove il ' indica la differenziazione rispetto a  $\Psi$ . Ora, utilizzando le (3.16a) e (3.16b) e la (3.19) otteniamo:

$$\mathbf{J} = \frac{I'}{2\pi} \mathbf{B} + P' r \hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad (3.23)$$

Inoltre

$$L(\Psi) + \mu_0 r J_\varphi = 0 \quad (3.24)$$

dove  $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$  è il versore lungo la direzione  $\varphi$ . Quindi si avrà:

$$\nabla\varphi = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{R} \quad (3.25a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_z \quad (3.25b)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_r \quad (3.25c)$$

Allora possiamo esprimere il campo magnetico usando le (3.16b), (3.16a) e (3.19):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I(\Psi)}{2\pi} \nabla\varphi + \nabla\Psi \times \nabla\varphi \quad (3.26)$$

vediamo in particolare che  $P$  e  $I^2$  dipendono da  $\Psi$ . Quando queste ultime due grandezze sono lineari o quadratiche in funzione di  $\Psi$ , allora la (3.21) diventa un'equazione differenziale lineare. Consideriamo un caso semplice di linearità di  $\Psi$ . Al confine del plasma si avranno le seguenti condizioni:

$$\Psi = \Psi_b \quad (3.27a)$$

$$P_b = P(\Psi_b) \quad (3.27b)$$

$$I_b^2 = I^2(\Psi_b) \quad (3.27c)$$

con:

$$P(\Psi) = P_b - \frac{a}{\mu_0 R^2} (\Psi - \Psi_b) \quad (3.28a)$$

$$I^2(\Psi) = I_b^2 - \frac{8\pi^2}{\mu_0^2} b (\Psi - \Psi_b) \quad (3.28b)$$

Quindi a partire dalla (3.24) si ottiene:

$$\boxed{L(\Psi) = a \frac{r^2}{R^2} + b = -\mu_0 r J_\varphi} \quad (3.29)$$

che è sempre l'equazione di Grad-Shafranov in questo caso. Ora impostiamo la posizione dell'asse magnetico  $z$  nel punto  $(R, 0)$ . La soluzione della (3.29) sarà:

$$\begin{aligned} \Psi - \Psi_0 = \frac{b+a}{1-\epsilon} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + c \frac{r^2 - R^2}{R^2} \right) z^2 + \frac{\epsilon}{8R^2} (r^2 - R^2) + \right. \\ \left. + \frac{(1+\epsilon)b - (1-c)(b+a)}{24(b+a)R^4} (r^2 - R^2)^3 \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

che è corretta fino a  $(r-R)^3$ . Inoltre,  $\epsilon$  e  $c$  sono costanti arbitrarie e la condizione iniziale è:

$$\Psi_0 = \Psi(R, 0) \quad (3.31)$$

Quando il coefficiente del terzo termine del lato destro è zero, si ha:

$$(1+\epsilon)b - (1-c)(b+a) = 0 \quad (3.32)$$

da cui:

$$\epsilon = -\frac{c-1}{\frac{a}{b}} - c \quad (3.33)$$

allora la (3.30) è la *soluzione di Solev* esatta dell'equazione di Grad-Shafranov. Se ora impostiamo:

$$c = \frac{R^2}{R^2 - R_x^2} \quad (3.34)$$

allora la (3.33) diventa:

$$\epsilon = -\left( \frac{a}{b} + \frac{R^2}{R_x^2} \right) R_x^2 \frac{1}{R^2 - R_x^2} \quad (3.35)$$

Quindi considerando la (3.35), la (3.30) è ridotta alla forma:

$$\Psi = \frac{b}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{R_x^2} \right) z^2 + \frac{a + \left( \frac{R^2}{R_x^2} \right) b}{8R^2} [(r^2 - R^2)^2 - (R^2 - R_x^2)^2] \quad (3.36)$$

La (3.36) è una soluzione esatta all'equilibrio nella regione interna del plasma, circondata dalla parete di conduzione:

$$\Psi(r, z) = \Psi_b \quad (3.37)$$

La superficie:

$$\Psi(r, z) = 0 \quad (3.38)$$

è chiamata *superficie separatrice* (riferita alla figura seguente) ed è la superficie magnetica passante per i punti  $X$ . I punti separatori  $X$  si trovano in  $(R_x, \pm z_x)$ , dove  $z_x$  è indicato con:

$$z_x = \left[ - \left( \frac{a}{b} + \frac{R^2}{R_x^2} \right) \left( 1 - \frac{R_x^2}{R^2} \right) \frac{1}{2} \right]^{1/2} R_x \quad (3.39)$$

Il valore massimo di  $r$ , è  $R_{max}$ , entro cui la superficie di separazione è:

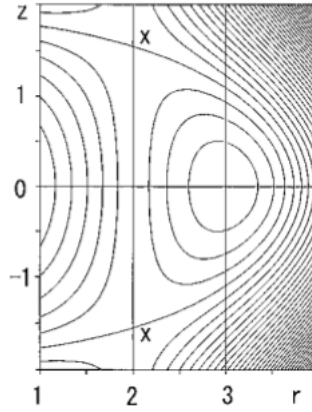


Figura 3.5: Il contorno (superficie magnetica) della funzione di flusso  $\Psi$  della (3.36) nel caso in cui  $a/b = 4.4$ ,  $R = 3$ ,  $R_X = 2$  è riportato nella figura. I due  $X$  sono i punti separatori e la superficie magnetica passante per  $X$  è la superficie di separazione.

$$R_{max} = \left( 2 - \frac{R_x^2}{R^2} \right)^{1/2} R \quad (3.40)$$

Se impostiamo la superficie di separazione al confine del plasma, e quindi imponiamo l'annullamento di  $\Psi_b$ , allora otterremo tre valori fondamentali:

$$\frac{1}{A} = \frac{R_{max} - R_x}{2R} = \frac{\left(2 - \frac{R_x^2}{R^2}\right)^{1/2} - \frac{R_x}{R}}{2} \quad (3.41a)$$

$$k_s = \frac{2z_x}{R_{max} - R_x} = \frac{Az_x}{R} \quad (3.41b)$$

$$\beta_{PO} = \frac{P(R, 0) - P_b}{\frac{B_z^2(R_x, 0)}{2\mu_0}} = \frac{a}{a + \left(\frac{R^2}{R_x^2}\right)b} \quad (3.41c)$$

che sono rispettivamente il *rapporto di aspetto*  $A$ , il *rapporto di allungamento*  $k_s$  e il *beta poloidale*  $\beta_{PO}$ . È comunque necessario aggiungere una soluzione addizionale alla (3.36), che è:  $r^2 \ln\left(\frac{r^2}{R_x^2}\right) - r^2$  e si ottiene quindi:

$$\Psi = \frac{b+d}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R_x^2}\right) z^2 + \frac{a + \left(\frac{R^2}{R_x^2}\right)(b+d)}{8R^2} [(r^2 - R^2)^2 - (R^2 - R_x^2)^2] - \frac{a}{4} \left[ r^2 \ln\left(\frac{r^2}{R_x^2}\right) - (r^2 - R_x^2) \right] \quad (3.42)$$

Quando la separatrice viene scelta come confine del plasma, e quindi:

$$\Psi(r, z) = 0 \quad (3.43)$$

si ha:

$$\frac{z_x^2}{R_x^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{a}{a+d} + \frac{R^2}{R_x^2} \right) \left( 1 - \frac{R_x^2}{R^2} \right) \quad (3.44a)$$

$$\frac{R_{max}^2}{R^2} = \left( 2 - \frac{R_x^2}{R^2} \right) + \frac{2d \left[ x \frac{\ln x}{x-1} \right]}{a + \frac{R^2}{R_x^2}(b+d)} \quad (3.44b)$$

$$x = \frac{R_{max}^2}{R_x^2} \quad (3.44c)$$

allora i tre valori precedenti diventano:

$$\frac{1}{A} = \frac{\frac{R_{max}}{R} - \frac{R_x}{R}}{2} \quad (3.45)$$

$$k_s = \frac{Az_x}{r} \quad (3.46)$$

$$\beta_{PO} = \frac{a}{a + \frac{R^2}{R_x^2}(b+d)} \left[ 1 + \frac{2d \left( \ln \frac{R^2}{R_x^2} - \left( 1 - \frac{R^2}{R_x^2} \right) \right)}{\left( a + \frac{R^2}{R_x^2}(b+d) \right) \left( 1 - \frac{R^2}{R_x^2} \right)} \right] \quad (3.47)$$

$$(3.48)$$

Si ha allora un sistema simmetrico per traslazione e quindi tutte le derivate parziali rispetto a  $z$  sono nulle. Allora.

$$\Psi = A_z(r, \theta) \quad (3.49a)$$

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (3.49b)$$

$$B_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (3.49c)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} I(\Psi) \quad (3.49d)$$

$$P = P(\Psi) \quad (3.49e)$$

Allora l'equazione di equilibrio si riduce a:

$$\frac{1}{r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \mu_0 \frac{\partial P(\Psi)}{\partial \Psi} + \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} \frac{\partial I^2(\Psi)}{\partial \Psi} = 0 \quad (3.50)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2\pi} I' \mathbf{B} + P' \hat{\mathbf{e}}_z \quad (3.51)$$

$$\Delta \Psi + \mu_0 J_z = 0 \quad (3.52)$$

### 3.2.3 Campo verticale per l'equilibrio del Tokamak

Il campo magnetico poloidale prodotto dalla corrente  $I_P$  dentro all'anello di plasma è più forte di quello esterno. Quindi è necessario, al fine di mantenere l'equilibrio all'interno

del Tokamak, aggiungere un campo verticale, per ridurre il campo poloidale all'interno e per incrementare quello all'esterno. Allora è necessario stimare il campo magnetico  $B_{\perp}$ . Ricordiamo che se si esprime lo sforzo  $\sigma$  in coordinate cilindriche  $(r, \phi, z)$ , lo *hoop stress* è la componente normale dello sforzo in direzione azimutale, cioè la componente  $\sigma_{\phi\phi}$ . La *hoop force* è la forza corrispondente. Dunque la hoop force da cui la corrente dell'anello del plasma tende ad espandersi è:

$$F_h = -\frac{\partial}{\partial R} \frac{L_P I_P^2}{2} \Big|_{L_P I_P = \text{const}} = \frac{1}{2} I_P^2 \frac{\partial L_P}{\partial R} \quad (3.53)$$

dove si indica con  $L_P$  l'autoinduttanza dell'anello di corrente, e si esprime con:

$$L_P = \mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 2 \right) \quad (3.54)$$

dove il termine  $\mu_0 R \left( \ln \frac{8R}{a} - 2 \right)$  è l'induttanza causata dall'energia del campo magnetico fuori dal plasma, e  $\mu_0 R l_i / 2$  è l'induttanza causata dall'energia di campo magnetico dentro al plasma, dove:

$$l_i = \frac{2\pi \int_0^a B_P^2(\rho) \rho d\rho}{\pi a^2 B_P^2(a)} \quad (3.55)$$

allora la hoop force si esprime con:

$$F_h = \frac{\mu_0 I_P^2}{2} \left( \ln \frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 1 \right) \quad (3.56)$$

la forza esterna  $F_P$  esercitata dalla pressione del plasma è:

$$F_P = \langle P \rangle \pi a^2 2\pi \quad (3.57)$$

La forza interna  $F_{B1}$  causata dal campo toroidale dentro al plasma è:

$$F_{B1} = -\frac{\langle B_{\varphi}^2 \rangle}{2\mu_0} 2\pi^2 a^2 \quad (3.58)$$

La forza esterna  $F_{B2}$  data dalla pressione causata dal campo magnetico esterno è:

$$F_{B2} = \frac{B_{\varphi v}^2}{2\mu_0} 2\pi^2 a^2 \quad (3.59)$$



con  $B_{\varphi v}$  componente  $\varphi$  del campo al di fuori del confine del plasma. La forza  $F_1$ , agente sul plasma, causata dal campo  $B_{\perp}$  è:

$$F_1 = I_P B_{\perp} 2\pi R \quad (3.60)$$

Equilibrando tutte queste forze otterremo un'equazione generale del tipo:

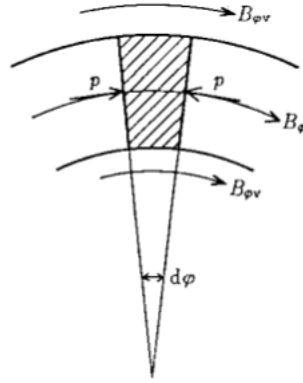


Figura 3.6: Equilibrio delle forze agenti in un plasma toroidale.

$$\frac{\mu_0 I_P^2}{2} \left( \ln \frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 1 \right) + 2\pi^2 a^2 \langle P \rangle + \frac{B_{\varphi v}^2}{2\mu_0} - \frac{\langle B_{\varphi}^2 \rangle}{2\mu_0} + 2\pi R I_P B_{\perp} = 0 \quad (3.61)$$

Allora il valore finale del campo cercato è:

$$B_{\perp} = -\frac{\mu_0 I_P}{4\pi R} \left( \ln \frac{8R}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right) \quad (3.62)$$

dove si ha:

$$\beta_P = \frac{\langle P \rangle}{\frac{B_P^2(a)}{2\mu_0}} \quad (3.63a)$$

$$\Lambda = \beta_P + \frac{l_i}{2} - 1 \quad (3.63b)$$

### 3.2.4 Controllo della posizione del plasma

Se il campo  $B_{\perp}$  è spazialmente uniforme, l'equilibrio è allora neutro per quanto riguarda il cambiamento della posizione del plasma nella direzione orizzontale. Quando le linee del campo verticale sono curve (vedi capitolo 2, paragrafo (2.3.3) e figura seguente), la posizione del plasma è stabile per quanto riguarda il moto in alto e in basso. La

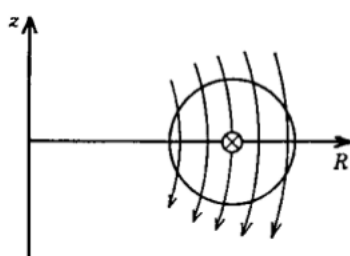


Figura 3.7: Campo verticale per l'equilibrio del plasma.

componente lungo  $z$  della forza magnetica applicata alla corrente anulare del plasma, di massa  $M$ , è:

$$F_z = -2\pi R I_P B_R \quad (3.64)$$

Dalla relazione:

$$\frac{\partial B_R}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial R} \quad (3.65)$$

otteniamo:

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = -2\pi R I_P \frac{\partial B_R}{\partial z} z = 2\pi I_P B_z \left( -\frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial R} \right) z \quad (3.66)$$

con  $I_P B_z < 0$ . L'*indice di decadimento*  $n$  per movimenti verticali è:

$$n = -\frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial R} > 0 \quad (3.67)$$

La componente orizzontale  $F_R$  della forza magnetica è:

$$F_R = M \frac{d^2(\Delta R)}{dt^2} = 2\pi R I_P (B_z - B_{\perp}) \Delta R \quad (3.68)$$

con  $B_{\perp}$  pari alla (3.62) e  $\Delta R$  variazione del raggio di curvatura della linea di forza. Quando il plasma è idealmente conduttore, il flusso magnetico dentro al plasma anulare è conservato, e:

$$\frac{\partial}{\partial R}(L_P I_P) + 2\pi R B_{\perp} = 0 \quad (3.69)$$

dove l'autoinduttanza è la stessa di prima. Allora l'equazione del moto diventa:

$$\boxed{M \frac{d^2(\Delta R)}{dt^2} = 2\pi I_P B_{\perp} \left(\frac{3}{2} - n\right) \Delta R} \quad (3.70)$$

avendo assunto:

$$\ln \frac{8R}{a} \gg 1 \quad (3.71)$$

Quindi la condizione di stabilità lungo il movimento orizzontale è:

$$\boxed{\frac{3}{2} > n} \quad (3.72)$$

### 3.2.5 Limiti del rapporto beta poloidale per l'equilibrio

Abbiamo visto nella sezione precedente che il campo verticale  $B_{\perp}$  necessario per l'equilibrio del plasma è dato dalla (3.62). La direzione di  $B_{\perp}$  è opposta a quella di  $B_{\omega}$ , prodotto dalla corrente del plasma dentro al toro; quindi il campo poloidale risultante diventa nullo in alcuni punti della regione interna del toro e si forma dunque una separatrice. Quando la pressione del plasma è aumentata e  $\beta_P$  è diventato abbastanza grande, il valore di  $B_{\perp}$  aumenta e la separatrice scorre lungo il plasma. Per semplicità si considera un *modello di confine nitido*, dove la pressione del plasma è costante all'interno del confinamento, e il confine include una corrente  $I_P$ . Quindi l'equazione di equilibrio per la pressione è:

$$\frac{B_{\omega}^2}{2\mu_0} + \frac{B_{\varphi v}^2}{2\mu_0} \approx P + \frac{B_{\varphi i}^2}{2\mu_0} \quad (3.73)$$

dove si indica con  $B_{\omega}$  il campo poloidale al di fuori del plasma e  $B_{\varphi v}$  e  $B_{\varphi i}$  sono le componenti  $\varphi$  del campo fuori e dentro al confine del plasma rispettivamente. Inoltre,

$B_{\varphi i}$  e  $B_{\varphi v}$  sono proporzionali a  $1/r$ . Se denotiamo i valori di  $B_{\varphi i}$  e  $B_{\varphi v}$  in  $r = R$  con  $B_{\varphi i}^0$  e  $B_{\varphi v}^0$  rispettivamente, allora la (3.73) può essere riscritta come:

$$B_{\omega}^2 = 2\mu_0 P - [(B_{\varphi v}^0)^2 - (B_{\varphi i}^0)^2] \frac{R}{r} \quad (3.74)$$

Il limite superiore della pressione del plasma è determinato dalla condizione secondo cui il campo poloidale risultante in  $r = r_{min}$  dentro al toro è nullo. Allora:

$$2\mu_0 P_{max} \frac{r_{min}^2}{R^2} = (B_{\varphi v}^0)^2 - (B_{\varphi i}^0)^2 \quad (3.75)$$

Sia ora  $r = R + a \cos \omega$ , allora se  $r_{min} = R - a$ , l'equazione per il bilancio delle pressioni diventa:

$$B_{\omega}^2 = 2\mu_0 P_{max} \left(1 - \frac{r_{min}^2}{r^2}\right) = 8\mu_0 P_{max} \frac{a}{R} \cos^2 \frac{\omega}{2} \quad (3.76)$$

dove si è assunto che:

$$\frac{a}{R} \ll 1 \quad (3.77)$$

Utilizzando la seguente relazione:

$$\oint B_{\omega} a d\omega = \mu_0 I_P \quad (3.78)$$

il limite superiore  $\beta_P^c$  del rapporto beta poloidale è:

$$\boxed{\beta_P^c = \frac{\pi^2 R}{16a} \approx 0.5 \frac{R}{a}} \quad (3.79)$$

dunque  $\beta_P^c$  è metà del rapporto di aspetto  $R/a$  in questo modello semplificato. Se introduciamo l'*angolo di trasformazione rotazionale*  $\iota$  e il *fattore di sicurezza*  $q_s = 2\pi/\iota$ , otteniamo:

$$\frac{B_{\omega}}{B_{\varphi}} = \frac{a}{R} \left(\frac{\iota}{2\pi}\right) = \frac{a}{Rq_s} \quad (3.80)$$

quindi il  $\beta$  diventa ora:

$$\beta = \frac{P}{\frac{B^2}{2\mu_0}} \approx \frac{P}{\frac{B_{\omega}^2}{2\mu_0}} \left(\frac{B_{\omega}}{B_{\varphi}}\right)^2 = \left(\frac{q}{Rq_s}\right)^2 \beta_p \quad (3.81)$$

Allora il limite superiore del rapporto beta è:

$$\boxed{\beta^c = \frac{0.5 a}{q_s^2 R}} \quad (3.82)$$

### 3.2.6 Limite beta della sezione trasversale allungata del plasma

Sappiamo che il limite beta poloidale per un Tokamak circolare è dato dalla seguente equazione:

$$\beta_P = 0.5 \frac{R}{a} \quad (3.83)$$

Lo stesso limite beta poloidale si ottiene da simili considerazioni per il tokamak allungato, dove il raggio orizzontale è  $a$  e quello verticale è  $b$ . Quando la lunghezza della circonferenza lungo la direzione poloidale è data da  $2\pi ak$  per un plasma allungato, il valore del campo poloidale è dato da:

$$\overline{B}_P = \frac{\mu_0 I_P}{2\pi ak} \quad (3.84)$$

dove  $k$  è approssimativamente:

$$k = \left[ \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{1}{2} \right]^{1/2} \quad (3.85)$$

Considerando le relazioni:

$$\frac{\overline{B}_P}{B_t} = \frac{ka}{Rq_I} \quad (3.86a)$$

$$q_I = \frac{ka}{R} \frac{B_t}{\overline{B}_P} \quad (3.86b)$$

otteniamo infine il seguente valore per il limite beta del plasma allungato:

$$\boxed{\beta \leq 0.5 k^2 \frac{a}{R q_I^2}} \quad (3.87)$$

E  $k^2$  è tante volte grande quante quelle di un plasma circolare. Per mantenere allungata la sezione trasversale del plasma, l'indice di decadimento  $n$  del campo verticale deve essere

negativo, così da rendere il plasma allungato posizionalmente instabile nel moto in alto e in basso. Se non c'è una parete di conduzione vicina al confine del plasma, il tasso di crescita è inverso al tempo di transito poloidale. Allora è necessario installare un guscio intorno al plasma, al fine di ridurre il tasso di crescita all'inverso del tempo resistivo di decadimento della corrente indotta dal guscio stesso (Miyamoto, 2007). Inoltre, un controllo del campo variabile orizzontale è necessario per mantenere la posizione del plasma.

### 3.2.7 Corrente di Pfirsch-Schlüter

Quando la pressione del plasma è isotropa, la corrente  $\mathbf{J}$  in esso si ricava dalle (3.2a) e (3.2d), e si ottiene:

$$\mathbf{J}_\perp = \frac{\hat{\mathbf{b}}}{B} \times \nabla P \quad (3.88a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_\perp = -\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{B}}{B^2} \times \nabla P \right) = -\nabla P \cdot \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right) \quad (3.88b)$$

dove  $\mathbf{J}_\perp$  viene chiamata *corrente diamagnetica*, poichè riduce il campo magnetico dentro al plasma. Quindi la componente parallela della corrente del campo magnetico del plasma,  $\mathbf{J}_\parallel$  ci dice che:

$$\nabla \mathbf{J}_\parallel = -\nabla P \left[ \left( \nabla \frac{1}{B^2} \times \mathbf{B} \right) + \frac{\mu_0 \mathbf{J}}{B^2} \right] = 2\nabla P \frac{\nabla \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{B^3} \quad (3.89a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}_\parallel}{\partial s} = 2\nabla P \left( \frac{\nabla \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{b}}}{B^2} \right) \quad (3.89b)$$

dove  $s$  è la lunghezza lungo la linea di forza magnetica. Se approssimiamo all'ordine zero, possiamo porre:

$$B \propto \frac{1}{R} \propto \left( 1 - \frac{r}{R_0 \cos \theta} \right) \quad (3.90a)$$

$$P = P(r) \quad (3.90b)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\iota}{2\pi R} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.90c)$$

dove  $\iota$  indica l'angolo di trasformazione rotazionale già visto in precedenza. Quando  $s$  si incrementa di  $2\pi R$ ,  $\theta$  cresce di  $\iota$ . Quindi l'equazione (3.90c) diventa:

$$\frac{\iota}{2\pi R} \frac{\partial \mathbf{J}_{\parallel}}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial r} \frac{2}{RB} \sin \theta \quad (3.91)$$

da cui si ottiene finalmente la *corrente di Pfirsch-Schlüter*:

$$\boxed{\mathbf{J}_{\parallel} = \frac{2q_s}{B} \frac{\partial P}{\partial r} \cos \theta} \quad (3.92)$$

La (3.92) è molto importante per stimare il coefficiente di diffusione di un plasma toroidale. Essa è causata dal cortocircuito, lungo le linee di campo magnetico, delle cariche di polarizzazione di deriva toroidali.

### 3.2.8 Spostamento di Shafranov

La corrente di Pfirsch-Schlüter produce il campo verticale nel plasma, che porta uno spostamento verso l'interno, della corrente del plasma. Nel caso di un Tokamak grande e con sezione trasversale del plasma circolare, lo *shift di Shafranov*  $\Delta(r)$  del centro della superficie magnetica, con il raggio  $r$  dal centro del confine del plasma di raggio  $a$ , è dato da:

$$\boxed{\frac{d\Delta}{dr} = \frac{1}{RrB_{\theta}^2} \left( \beta_P B_{\theta a}^2 \int_0^r r^2 \frac{d}{dr} \langle P \rangle dr - \int_0^r r B_{\theta}^2 dr \right)} \quad (3.93)$$

dove  $B_{\theta}$  è la grandezza del campo poloidale in  $r$  e  $B_{\theta a}$  è la grandezza del campo poloidale in  $r = a$ . Inoltre,  $\beta_P$  è il beta poloidale e  $\langle P \rangle$  è la media volumetrica della pressione:

$$\langle P \rangle = \int_0^a P 2r \frac{dr}{a^2} \quad (3.94)$$

Nel caso di un profilo parabolico della pressione, il termine di pressione della (3.93) diventa:

$$-\left(\frac{a}{R}\right) \beta_P \left(\frac{B_{\theta a}}{B_{\theta}}\right)^2 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \quad (3.95)$$

mentre nel caso di un profilo di corrente piatto, il secondo termine del lato destro della (3.93) è:

$$-\left(\frac{a}{4R}\right)\left(\frac{r}{a}\right) \quad (3.96)$$

Quando si hanno sia la (3.95) che la (3.96), allora lo shift di Shafranov diventa:

$$\boxed{\frac{\Delta}{a} = \left(\frac{a}{2R}\right)\left(\beta_P + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)} \quad (3.97)$$

### 3.3 International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER)

Nel 2006 sono iniziati i lavori relativi all'*ITER* (*International Thermonuclear Experimental Reactor*), un progetto internazionale che si propone di realizzare un reattore a fusione nucleare di tipo sperimentale, in grado di produrre più energia di quanta il processo ne consumi per l'innescio e il sostentamento della reazione di fusione (<https://www.iter.org>). È un reattore deuterio-trizio in cui il confinamento del plasma è ottenuto in un campo magnetico all'interno di un Tokamak. La durata operativa dell'impianto è prevista in circa vent'anni. Lo scopo principale dell'esperimento è il raggiungimento di una reazione di fusione stabile e l'incremento delle attuali conoscenze sulla fisica del plasma. La fisica che sta alla base di un confinamento di questo tipo è quella descritta nei precedenti paragrafi di questo capitolo. In questa macchina, il plasma sarà contenuto all'interno di una camera a vuoto di forma toroidale nella quale verrà creato quello che si chiama *alto vuoto* ad una pressione di 0.1 Pa circa. La miscela di deuterio-trizio sarà iniettata nella camera a vuoto tramite un sistema di pompaggio e quindi verrà trasformata in un plasma, tramite ionizzazione indotta da un sistema elettrico. L'insieme dei vari strati protettivi della camera a vuoto è chiamato *blanket* (coperta). Il campo magnetico nel Tokamak sarà prodotto da un solenoide centrale e da circa 24 bobine superconduttrici.



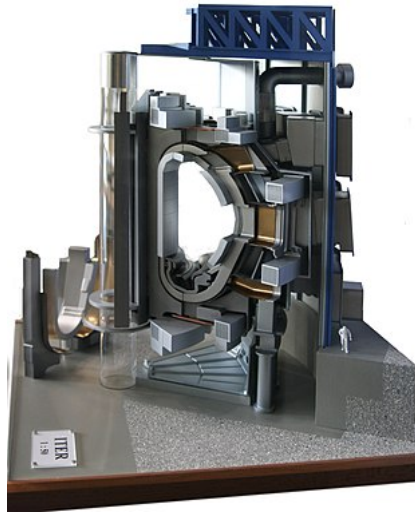


Figura 3.8: Modello dell'ITER.

Per garantire la superconduttività dei magneti, tutto il Tokamak sarà inserito all'interno di una *camera fredda*, nella quale un circuito a elio liquido manterrà gli avvolgimenti a  $T = 4$  K. Il plasma nel Tokamak sarà riscaldato fino alla temperatura di fusione tramite l'iniezione di atomi di idrogeno.

# Conclusione

Dopo aver descritto brevemente gli aspetti fisici generali del plasma, si è proceduto con lo studio delle sue caratteristiche elettromagnetiche, al fine di ottenere l'equazione di Klein-Gordon per la densità di elettroni presenti in esso. In seguito sono stati trattati brevemente alcuni meccanismi di confinamento magnetico, in particolare il comportamento del plasma all'interno di un campo magnetico (Paragrafo 2.1), il moto di una particella carica in un campo magnetico statico uniforme (Paragrafo 2.2) e il moto di una particella carica in un campo magnetico statico non uniforme (Paragrafo 2.3). Questi due capitoli sono serviti per una descrizione più accurata dell'ultima parte dell'elaborato, dove è stato trattato il confinamento vero e proprio di un plasma termonucleare. Come applicazione è stato scelto il sistema Tokamak, che consiste nel confinamento di un particolare plasma all'interno di una regione toroidale ben definita. In questa regione deve essere soddisfatta un'equazione per l'equilibrio in sistemi assialmente simmetrici. È stato approfondito in particolare lo studio dei 3 campi magnetici agenti all'interno del sistema (toroidale, verticale e poloidale). Infine sono state descritte alcune caratteristiche particolari del sistema, come la corrente di Pfirsch-Schlüter che, producendo il campo verticale nel plasma, genera uno spostamento, detto di Shafranov, della corrente del plasma stesso, verso l'interno. Infine è stato descritto brevemente il reattore a fusione nucleare ITER, dove il plasma viene confinato in una regione toroidale al fine di produrre energia nucleare.

# Appendice

## Superficie magnetica

Una linea di forza magnetica soddisfa le equazioni:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} = \frac{dl}{B}$$

con  $l$  lunghezza lungo una linea magnetica della forza:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

La superficie magnetica:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \text{const}$$

è tale che tutte le linee di forza magnetiche giacciono su quella superficie, che soddisfa:

$$(\nabla\Psi(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{B} = 0$$

Il vettore  $\nabla\Psi(\mathbf{r})$  è normale alla superficie magnetica e deve essere ortogonale a  $\mathbf{B}$ . In termini di coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$  il campo magnetico  $\mathbf{B}$  è dato da:

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ B_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

con  $\mathbf{A}$  potenziale vettore. Nel caso di una configurazione assialmente simmetrica, e quindi con la derivata parziale rispetto a  $\varphi$  nulla, si ha che:

$$\boxed{\Psi(r, z) = rA_\varphi(r, z)}$$

soddisfa la condizione di perpendicolarità scritta prima. Nel caso invece di una simmetria traslazionale, e quindi con le derivate parziali lungo  $z$  nulle, si ha:

$$\boxed{\Psi(r, \varphi) = A_z(r, \varphi)}$$

Infine nel caso di una simmetria elicoidale, in cui  $\Psi$  è funzione solamente di  $r$  e  $\varphi - \alpha z$ , la superficie è:

$$\boxed{\Psi(r, \varphi - \alpha z) = A_z(r, \varphi - \alpha z) + \alpha r A_\varphi(r, \varphi - \alpha z)}$$

con  $\alpha$  passo elicoidale.

# Bibliografia

- [1] A. A. Arms, K. F. Schoepf, G. H. Miley, D. R. Kingdon, 2000, *Principles of fusion energy*, World Scientific.
- [2] P. M. Bellan, 2006, *Fundamentals of Plasma Physics*, Cambridge.
- [3] J. P. Freidberg, 2007, *Plasma physics and fusion energy*, Cambridge.
- [4] ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), <https://www.iter.org/>.
- [5] J. D. Jackson, 2017, *Classical Electrodynamics*, III edizione, Wiley.
- [6] K. Miyamoto, 2007, *Controlled fusion and plasma physics*, Taylor & Francis.
- [7] NASA (National Aeronautics and Space Administration), <https://www.nasa.gov/>.